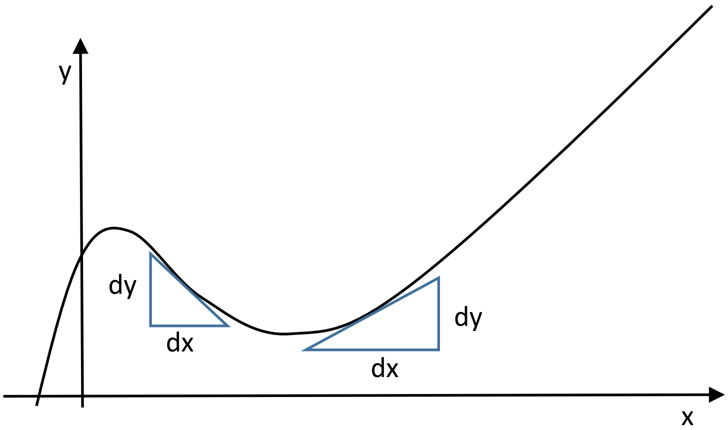
12 Calcwlws

Mae calcwlws yn cael ei weld yn aml fel yn faes cymhleth ac uwch o fathemateg, yn ôl pob tebyg oherwydd yr algebra cymhleth eu hangen i ddatrys problemau calcwlws yn ddadansoddol. Mae hyn yn anffodus, gan fod calcwlws yn seiliedig o amgylch rhai cysyniadau syml a defnyddiol iawn sy'n cael defnyddiau ar unwaith mewn amrywiaeth o feysydd pwnc. Gall algebra cymhleth yn cael eu hosgoi yn aml drwy ddefnyddio dulliau rhifiadol symlach sy'n rhoi cywirdeb derbyniol. Mae hyn wedyn yn caniatáu i fyfyrwyr ganolbwyntio ar ddehongli'r canlyniadau a gynhyrchir.

Gellir calcwlws ei rannu yn ddau brif ganghennau, **differiad** ac **integriad**:

Yr amcan o **ddifferu** yw dadansoddi ffwythiant mathemategol i benderfynu ar y gyfradd y mae'r ffwythiant yn newid ar wahanol bwyntiau. Mae cyfradd y newid yn aml yn cael ei fynegi fel y gymhareb o ochrau triongl lluniadu fel tangiad i'r gromlin:

$$cyfradd\ y\ newid = \frac{dy}{dx}$$



Ffigur 369: Graddiant ffwythiant

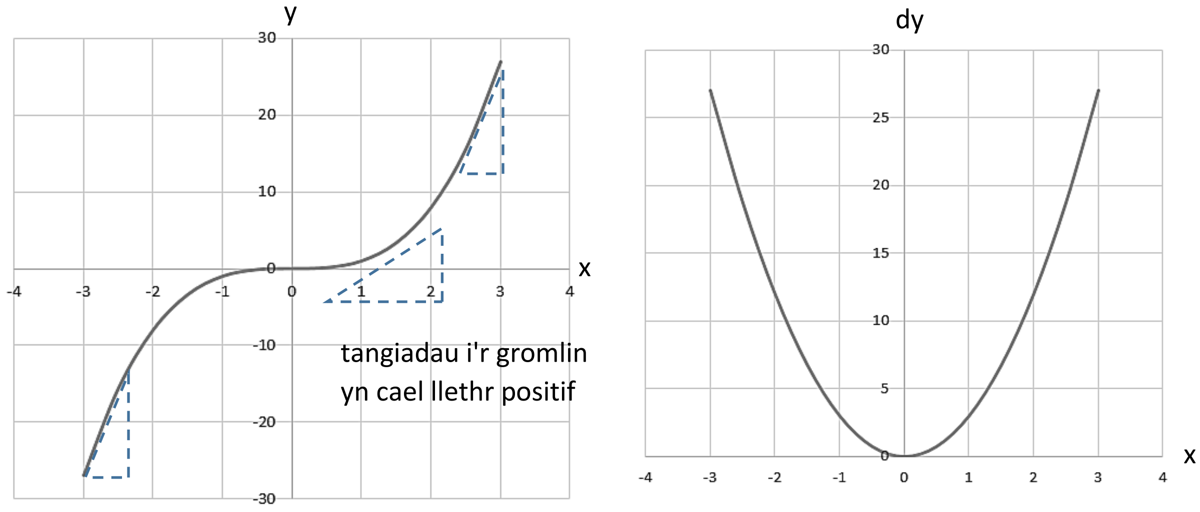
Gall y berthynas rhwng gwerth ffwythiant a'i chyflymder newid yn bwysig mewn amrywiaeth o gyd-destunau. Er enghraifft, mae cyflymder golli gwres o ystafell yn dibynnu ar dymheredd yr ystafell, ac mae cyflymder o gynhyrchu bacteria newydd yn dibynnu ar y nifer o facteria presennol yn y gytref.

Mae'r dechneg a ddefnyddir mewn cyrsiau mathemateg lefel uwch yn arfer defnyddio dulliau algebraidd i ddarganfod fformiwla ar gyfer y gyfradd newid o'r ffwythiant. Mae'r gyfradd newid yn ei adnabod fel **deilliad**. Er enghraifft, y ffwythiant:

$$y = x^3$$

yn cael y deilliad:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2$$



$$fwythiant \qquad y = x^3 \qquad\qquad deilliad \quad \frac{dy}{dx} = 3x^2$$

Ffigur 370: Graffiau y = x^3 a'i ddeilliad

Mae gan y ffwythiant y = x^3 siâp cromlin dwbl, sy'n codi'n serth tuag at y tarddiad, lefelu, ac yna codi eto yn fwyfwy serth ar gyfer gwerthoedd x positif. Mae'r graff y deilliad yn parabola, gwyro i lawr i isafswm o sero am x = 0.

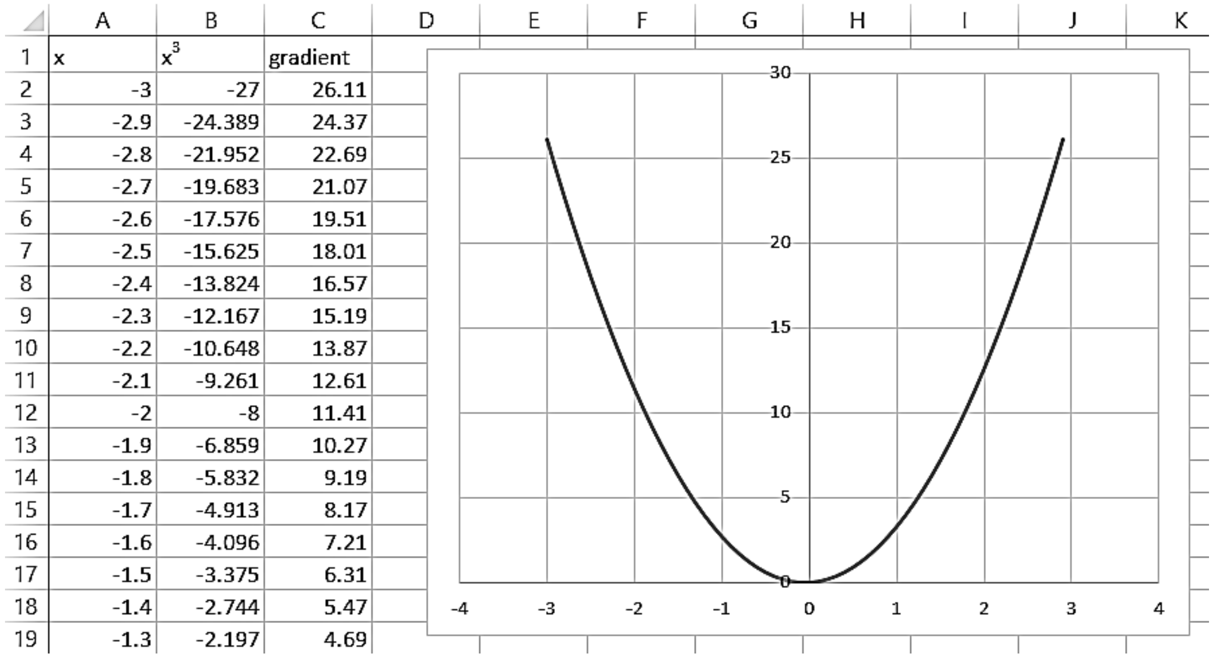
Drwy gymharu'r graffiau uchod, gallwn weld bod siâp ar gyfer y deilliad yn rhesymol. Pe baem yn edrych ar bwyntiau ar y gromlin y = x^3 i asesu cyfradd y newid, byddai pob tangiadau arddangos llethr positif i fyny'r bryn ac eithrio'r pwynt x = 0 lle mae'r llinell graff yn llorweddol. Ar ben hynny, mae'r gromlin yn fwyaf serth ar x-gwerthoedd sydd bellaf i ffwrdd o'r sero naill ai yn y cyfeiriad positif neu negyddol. O edrych nawr ar y gromlin deilliad, gwelwn fod pob gwerth yn gadarnhaol ac eithrio'r pwynt x = 0 lle mae cyfradd y newid yn sero. Mae'r deilliad yn dangos gwerthoedd uwch ar gyfer y gyfradd o newid wrth i'r x-gwerthoedd yn symud ymhellach oddi wrth sero yn y cyfeiriadau positif a negyddol.

Mae'r dull dadansoddol wedi bod yn llwyddiannus wrth benderfynu cyfradd newid y ffwythiant y = x^3, a gellir eu defnyddio i ddod o hyd i ddeilliadau ar gyfer amrywiaeth helaeth o ffwythiannau eraill. Fodd bynnag, gall yr algebra dan sylw fod yn gymhleth, ac yn aml yn ychwanegu ddim llawer at ddealltwriaeth o'r broblem sy'n cael ei hymchwilio. Dewis arall yw defnyddio dulliau **rhifiadol**. Byddwn yn archwilio'r dull hwn trwy edrych eto'r ffwythiant y = x^3.

Y ffordd symlaf o gyfrifo newid y gyfradd yw **ddull Euler**. Rydym yn dechrau drwy gynhyrchu tabl o werthoedd rhifiadol ar gyfer y ffwythiant y = x^3, fel y dangosir yn ffigur 371. Mae camau bach o 0.1 mewn gwerth **x** wedi cael eu dewis, er mwyn cael cywirdeb rhesymol. Mae'r newid yng ngwerth **y** ar gyfer pob cynnydd yng ngwerth **x** yn cael ei ddefnyddio i benderfynu ar newid cyfradd. Er enghraifft, rhwng gwerthoedd **x** o -3.0 a -2.9, rydym yn cyfrifo bod gwerth **y** yn newid o -27 i -24.39:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(-24.39) - (-27.00)}{(-2.9) \quad - \quad (-3.0)} = \frac{2.61}{0.1}$$

$$\frac{dy}{dx} = 26.1$$



	A	B	C
1	x	x^3	gradient
2	-3	-27	26.11
3	-2.9	-24.389	24.37
4	-2.8	-21.952	22.69
5	-2.7	-19.683	21.07
6	-2.6	-17.576	19.51
7	-2.5	-15.625	18.01
8	-2.4	-13.824	16.57
9	-2.3	-12.167	15.19
10	-2.2	-10.648	13.87
11	-2.1	-9.261	12.61
12	-2	-8	11.41
13	-1.9	-6.859	10.27
14	-1.8	-5.832	9.19
15	-1.7	-4.913	8.17
16	-1.6	-4.096	7.21
17	-1.5	-3.375	6.31
18	-1.4	-2.744	5.47
19	-1.3	-2.197	4.69

Ffigur 371: Plotio deilliad y = x^3 gan ddull Euler

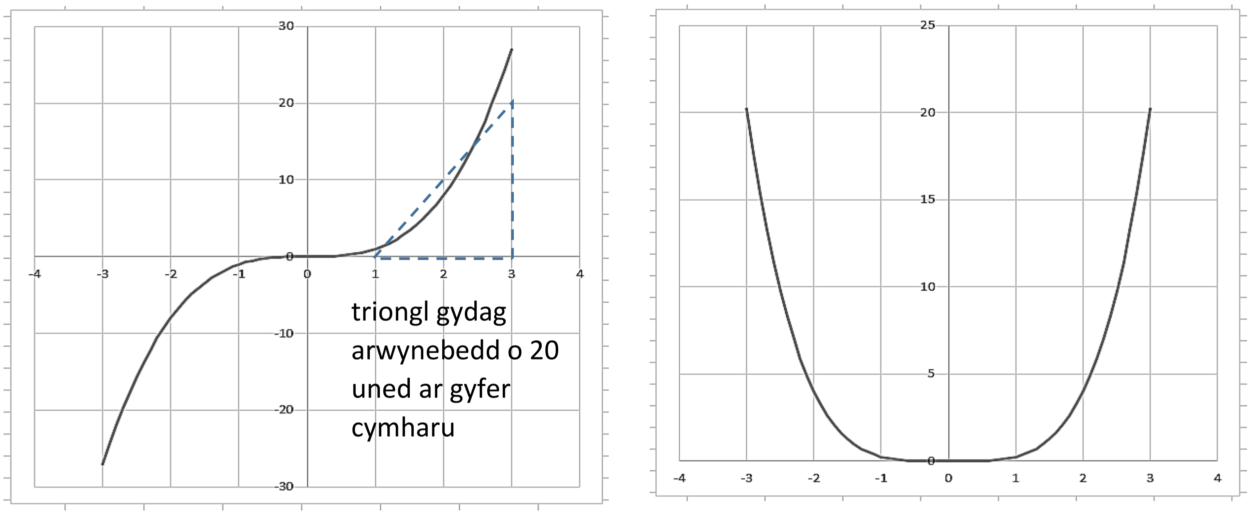
Drwy gymharu ffigurau 370 a 371, rydym yn gweld bod y canlyniad a gafwyd gan y dull rhifol yn agos iawn at y canlyniad dadansoddol, a byddai yn foddhaol i'w ddefnyddio ar gyfer mwyaf o ddibenion ymarferol.

Mae **integreiddio**'r ail brif gangen o galcwlws. Rydym unwaith eto yn dechrau gyda ffwythiant, ond rydym nawr yn darganfod yr arwynebedd o dan y graff, yn hytrach na'r graddiant. Er enghraifft, y ffwythiant:

$$y = x^3$$

yn cael yr integryn:

$$\int y.dx = \frac{1}{4}x^4$$



$ffwythiant \quad y = x^3$ $\qquad$ $integryn \quad \int y.dx = \frac{1}{4}x^4$

Ffigur 372: Graffiau o'r ffwythiant y = x^3 a'i integryn

I ganfod yr arwynebedd o dan y llinell graff y = x^3 rhwng unrhyw ddau gwerthoedd-x a ddewiswyd, rydym yn cymryd gwerthoedd y integrol ar y ddau bwynt **x**, yna tynnwch yr un o'r llall. Er enghraifft, i ddod o hyd i'r arwynebedd o dan y graff rhwng **x** = 1 a **x** = 3:

gwerth y integrol am x = 1: 0.25
gwerth y integrol am x = 3: 20.25

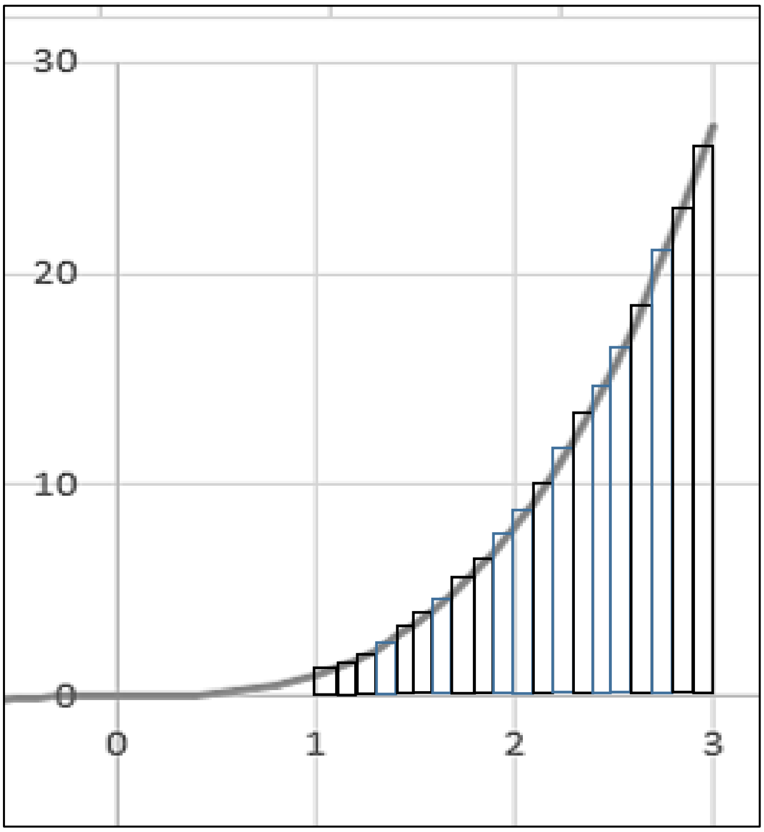
Tynnu:

20.25 – 0.25 = 20.00

Mae'r canlyniad hwn yn ymddangos yn rhesymol o'i gymharu â thriongl o arwynebedd 20 uned sydd wedi ei ddangos wrth ymyl y graff llinell.

Gall yr arwynebedd dan y graff o ffwythiant fod yn bwysig mewn amrywiaeth o gyfrifiadau. Er enghraifft, mae'r arwynebedd o dan graff o gyflymder yn erbyn amser yn cynrychioli'r pellter a deithiwyd, ac mae'r arwynebedd o dan graff Watiau o bŵer trydanol yn erbyn eiliadau o amser yn cynrychioli egni trydanol mewn Jouleau.

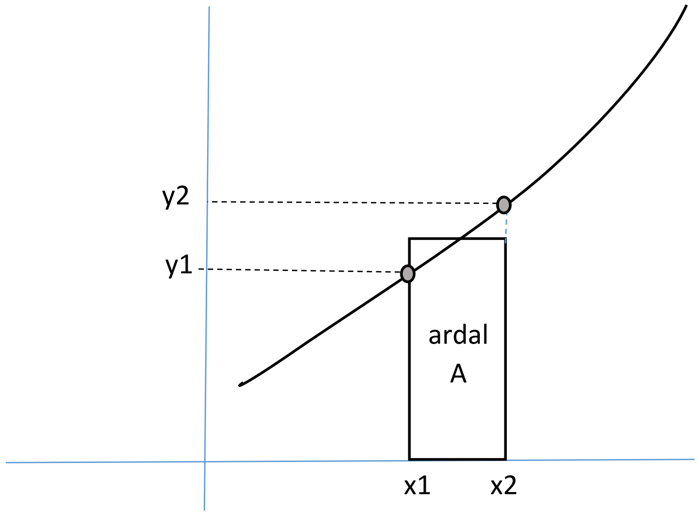
Fel yn achos o ddod o hyd i ddeilliadau, mae'n bosibl defnyddio dulliau dadansoddol i gael yr integrynnau o amrywiaeth eang o ffwythiannau. Fodd bynnag, gall yr algebra fod yn gymhleth ac nid yn ychwanegu llawer at ddealltwriaeth y dasg. Gall canlyniadau digon cywir fel arfer ar gael mewn ffordd fwy syml trwy ddulliau rhifiadol. Byddwn yn dangos y **dull trapezoidal** drwy ddod o hyd ar ardal o dan y graff y = x^3 rhwng y pwyntiau x = 1 a x = 3. Mae'r dull hwn yn ei ddangos yn ffigwr 373 isod:



x	x^3	column area
1	1	0.08645
1.1	1.331	0.11655
1.2	1.728	0.15295
1.3	2.197	0.19625
1.4	2.744	0.24705
1.5	3.375	0.30595
1.6	4.096	0.37355
1.7	4.913	0.45045
1.8	5.832	0.53725
1.9	6.859	0.63455
2	8	0.74295
2.1	9.261	0.86305
2.2	10.648	0.99545
2.3	12.167	1.14075
2.4	13.824	1.29955
2.5	15.625	1.47245
2.6	17.576	1.66005
2.7	19.683	1.86295
2.8	21.952	2.08175
2.9	24.389	2.31705
3	27	2.56945
	total area	20.02

Ffigur 373: Defnydd o'r dull trapezoidal i ddod o hyd i'r ardal islaw'r graff y = x^3

Rydym yn dechrau drwy gyfrifo gwerthoedd ar gyfer y ffwythiant $y = x^3$ mewn mannau agos rhwng $x = 1$ a $x = 3$. Mae cyfnod o 0.1 wedi cael ei dewis i ddarparu cywirdeb rhesymol. Mae cyfres o betryalau wedyn yn cael eu hadeiladu, a'u harwynebeddau yn darganfod. Arwynebedd pob petryal yn cael ei gyfrifo fel cyfartaledd o'r gwerthoedd ffwythiant ar ddechrau a diwedd y cyfnod, wedi'i luosi â lled yr egwyl o 0.1.



$$A = \frac{(y1 + y2)}{2} \times 0.1$$

Ffigur 374: Amcangyfrif o'r ardal dan y graff gan dull trapezoidal

Mae'r meysydd a gyfrifwyd ar gyfer y set o golofnau yn cael eu hychwanegu i gael amcangyfrif terfynol o'r ardal o dan y gromlin ffwythiant. Rydym yn cael canlyniad o 20.02, sydd yn ddigon agos at y gwerth cywir o 20.00 am y fwyaf o ddibenion ymarferol.

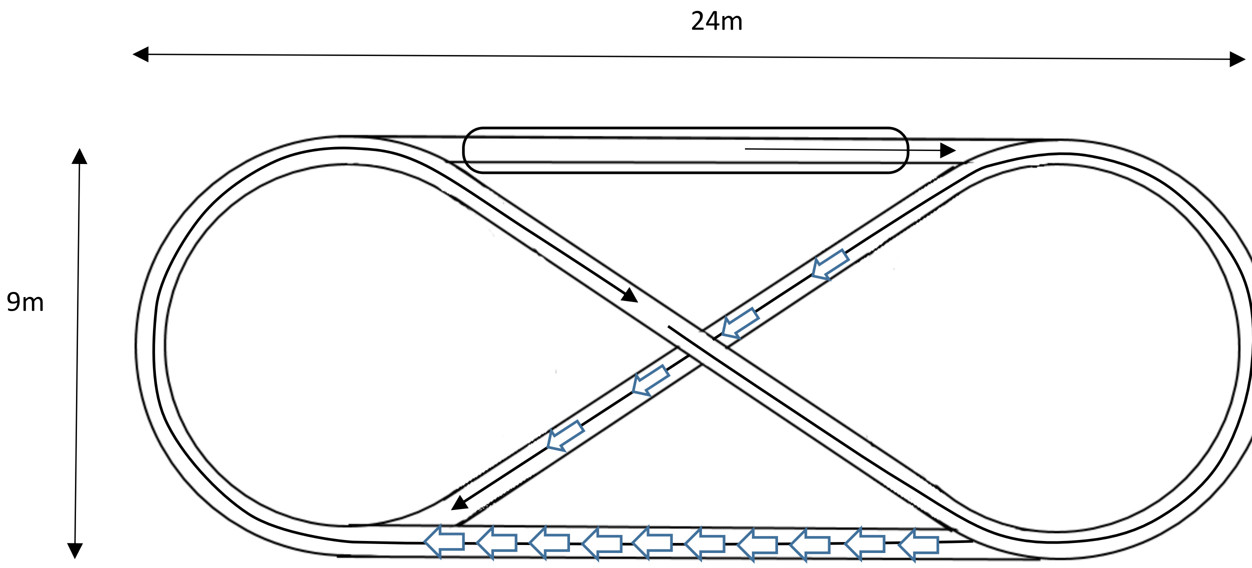
Yn yr adrannau sy'n dilyn, rydym yn edrych ar nifer o brosiectau rhifedd sy'n cynnwys defnydd o galcwlws. Cafwyd atebion yn aml drwy ddulliau rhifiadol, gan fod y rhain yn ddefnyddiol i fyfyrwyr wrth ennill dealltwriaeth gliriach o'r cyfrifiadau sy'n ofynnol.

Mudiant cyflymedig am roller coaster

Gall technegau calcwlws fod yn ddefnyddiol wrth ddadansoddi mudiant o gerbydau neu beiriannau yn symud. Yn yr adran hon, byddwn yn dadansoddi data ar gyfer y 'Crazy Caterpillar', roller coaster bychan wedi ei leoli ar bromenâd Abermaw. Er ddof iawn o gymharu â'i gefndryd mwy, mae'r Crazy Caterpillar yn arddangos rhai egwyddorion sylfaenol pwysig o fecaneg.

Mae'r roller coaster yn dilyn cynllun ffigyr-êt (ffigur 375), gyda'r trên yn gwneud dau gylched ar wahanol lefelau. Ar ôl gadael yr orsaf cychwyn, mae'r trên yn cyflymu i lawr cwymp byr, yna rhedeg o gwmpas gromlin i waelod y bryn lifft. Mae'r ceir yna yn dringo i'r lefel uwch ar uchder o bedwar metr (ffigur 376).

Ar ôl rhedeg o amgylch y gromlin uchaf ac yn croesi canol y safle, mae'r ceir yn dolennu yn ôl o gwmpas gromlin lefel uchaf arall. Mae hyn yn dod ar drên i'r disgyniad cyflym terfynol, lle mae'r roller coaster yn cyrraedd ei gyflymder uchaf (ffigur 377). Ar ôl mynd o amgylch y gromlin ar y lefel is, mae'r ceir yn dychwelyd at y pwynt byrddio.

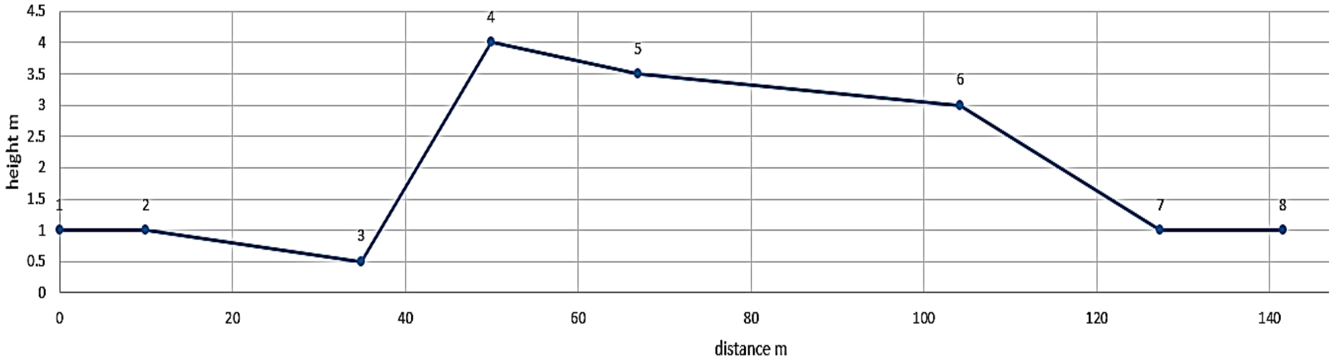


Ffigur 375: Cynllun trac y roller coaster Crazy Caterpillar

Ffigur 376: Ceir ar y bryn lifft a thrac lefel uchaf

Ffigur 377: Cerbydau yn ddisgyn y llethr o'r lefel uchaf i'r lefel isaf

Ein nod yw gwneud dadansoddiad o symudiad y roller coaster, o ran y lleoliad, cyflymder a chyflymiad y trên o geir ar wahanol adegau o gwmpas y trac. Y cam cyntaf yw llunio diagram proffil ar gyfer y trac. Mae amcangyfrifon o bellter ac uchder ar hyd cylched o'r trac yn cael eu dangos yn ffigur 378. Mae'r bryn lifft yn codi o bwynt 3 i bwynt 4, ac mae'r disgyniad cyflym terfynol yn digwydd rhwng pwyntiau 6 a 7.



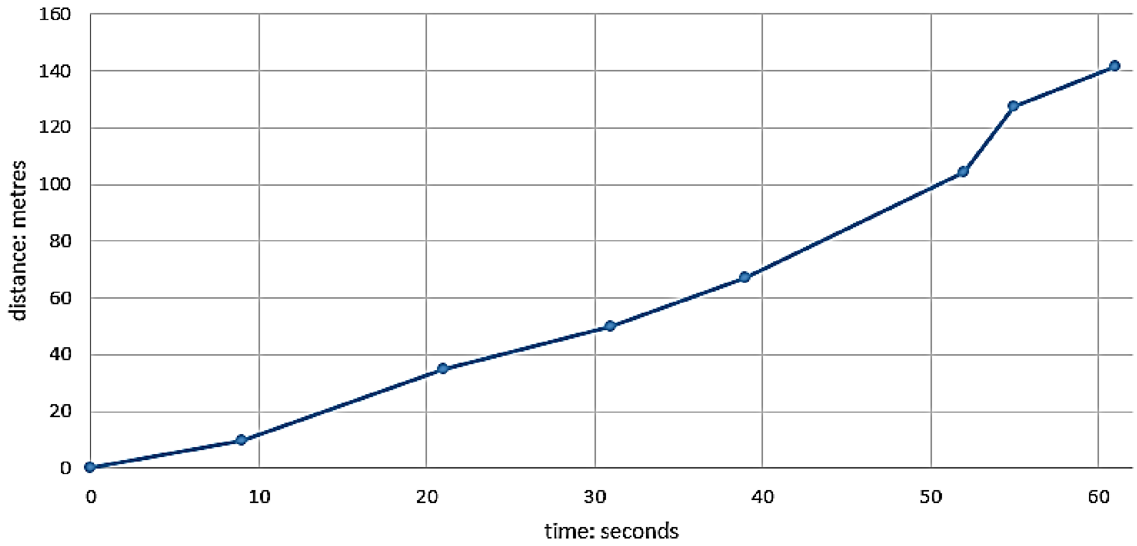
Ffigur 378: Proffil uchder ar gyfer cylched o'r trac roller coaster

Cofnodwyd amseroedd pan basiodd flaen y trên pob un o'r pwyntiau wedi'u rhifo yn ystod cylchdaith, ac yna cafwyd plot pellter-amser ei chynhyrchu (ffigur 379).

point	distance m	time s
1	0	0
2	10	9
3	34.9	21
4	49.9	31
5	66.92	39
6	104.22	52
7	127.38	55
8	141.52	61

Ffigur 379:

Data am bellter ac amser ar gyfer cylchdaith o'r trac roller coaster



Ffigur 380: Cromlin pellter-amser ar gyfer cylchdaith o'r trac roller coaster

Gall cyflymder cyfartalog yn cael eu cyfrifo ar gyfer pob adran o'r trac. Cyflymder yn cael ei ddiffinio fel newid yn lleoliad gydag amser. Gan ddefnyddio'r confensiwn fod y symbol **d** yn cynrychioli'r newid mewn mesur:

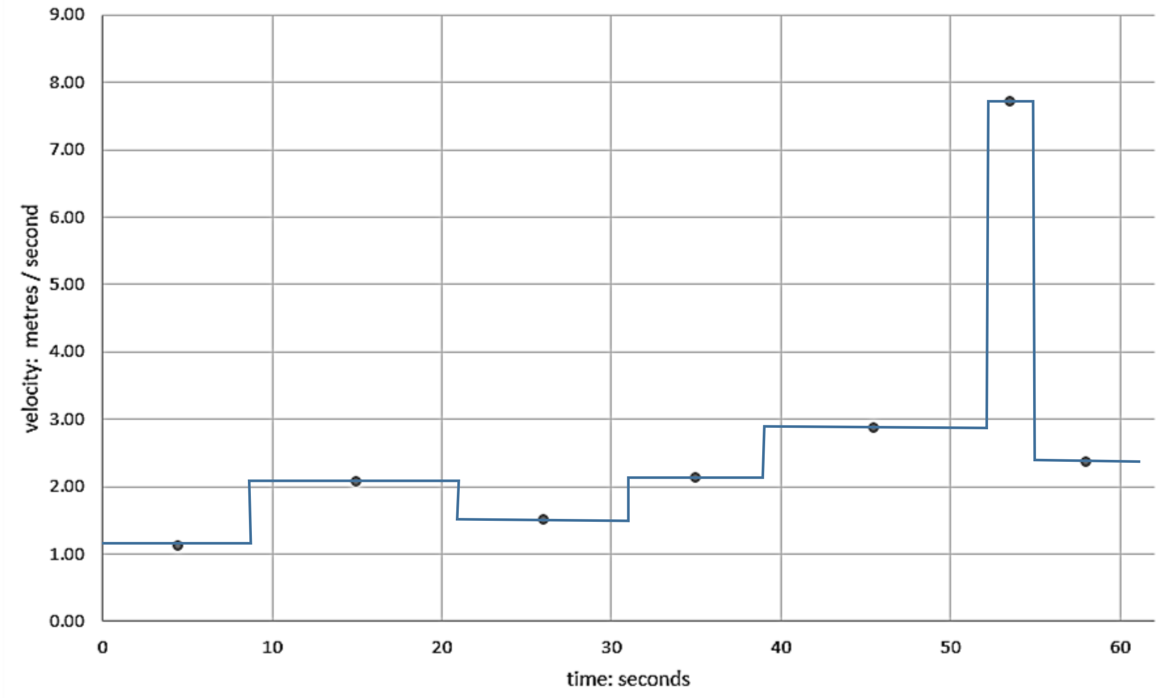
$$cyflymder = \frac{ds}{dt}$$

lle yw **s** yn bellter a **t** yw amser. Gall cyflymder yn cael ei amcangyfrif rhwng y pwyntiau nodi o amgylch y trac gan ddefnyddio dull Euler. Dangosir gwerthoedd yn y tabl isod.

point	distance m	time s	d (distance)	d (time)	mean velocity
1	0	0			
			10	9	1.11
2	10	9			
			24.9	12	2.08
3	34.9	21			
			15	10	1.50
4	49.9	31			
			17.02	8	2.13
5	66.92	39			
			37.3	13	2.87
6	104.22	52			
			23.16	3	7.72
7	127.38	55			
			14.14	6	2.36
8	141.52	61			

Ffigur 381: Cyfrifiad o ddata cyflymder ar gyfer y roller coaster

Mae'r data cyflymder wedi cael ei phlotio ar graff amser yn ffigur 382. Ar hyn o bryd, mae'r pwyntiau wedi'u cysylltu gan linellau syth. Mae hwn yn ddehongliad gor-symleiddio, a bydd y graff yn cael ei adolygu yn ddiweddarach.



Ffigur 382: Data cyflymder-amser ar gyfer cylchdaith o'r trac roller coaster

Gall cyflymiad cyfartalog yn cael eu cyfrifo ar gyfer pob adran o'r trac. Cyflymiad ei ddiffinio fel y newid mewn cyflymder gydag amser. Eto gan ddefnyddio'r confensiwn fod y symbol **d** yn cynrychioli'r newid mewn mesur:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

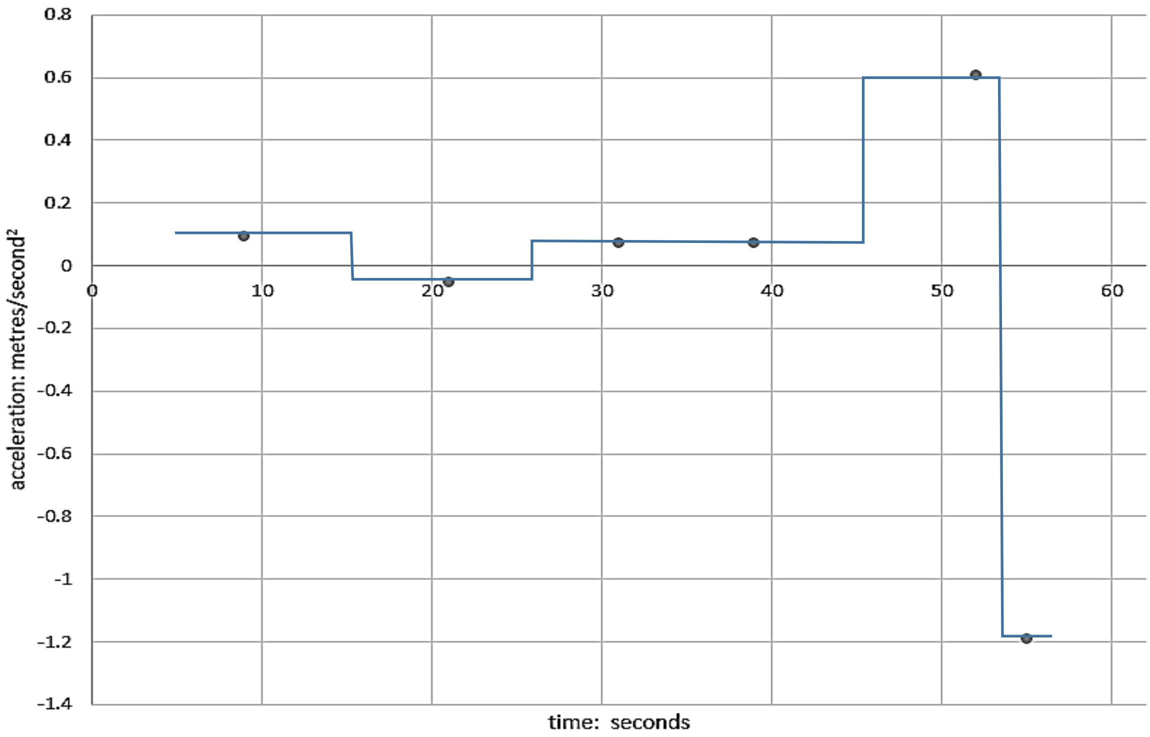
lle mae **a** yw cyflymu, **v** yw cyflymder a **t** yw amser. Efallai y byddwn hefyd yn disgrifio'r cyflymiad fel cyfradd newid o'r *gyfradd newid pellter gydag amser*, gan roi mynegiant:

$$a = \frac{d}{dt}\left(\frac{dv}{dt}\right) = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Gall dull Euler yn cael ei ddefnyddio i amcangyfrifo'r cyflymiad rhwng pwyntiau ar y trac:

point	distance m	time s	mean velocity	mean time	d(velocity)	d(time)	mean acceleration
1	0	0					
			1.11	4.5			
2	10	9			0.96	10.50	0.092
			2.08	15			
3	34.9	21			-0.58	11.00	-0.052
			1.50	26			
4	49.9	31			0.63	9.00	0.070
			2.13	35			
5	66.92	39			0.74	10.50	0.071
			2.87	45.5			
6	104.22	52			4.85	8.00	0.606
			7.72	53.5			
7	127.38	55			-5.36	4.50	-1.192
			2.36	58			
8	141.52	61					

Ffigur 383: Cyfrifiad o ddata cyflymu ar gyfer y roller coaster



Ffigur 384: Data cyflymiad-amser ar gyfer cylchdaith o'r trac roller coaster

Gall y plotiau cychwynnol o gyflymder a chyflymiad nawr yn cael ei mireinio i gynrychioli agosach y digwyddiadau sy'n cymryd lle fel trên o geir yn gwneud cylchdaith. Mae'r ardal o dan y graff cyflymiad yn cynrychioli cyflymder, fel y nodir gan yr integryn:

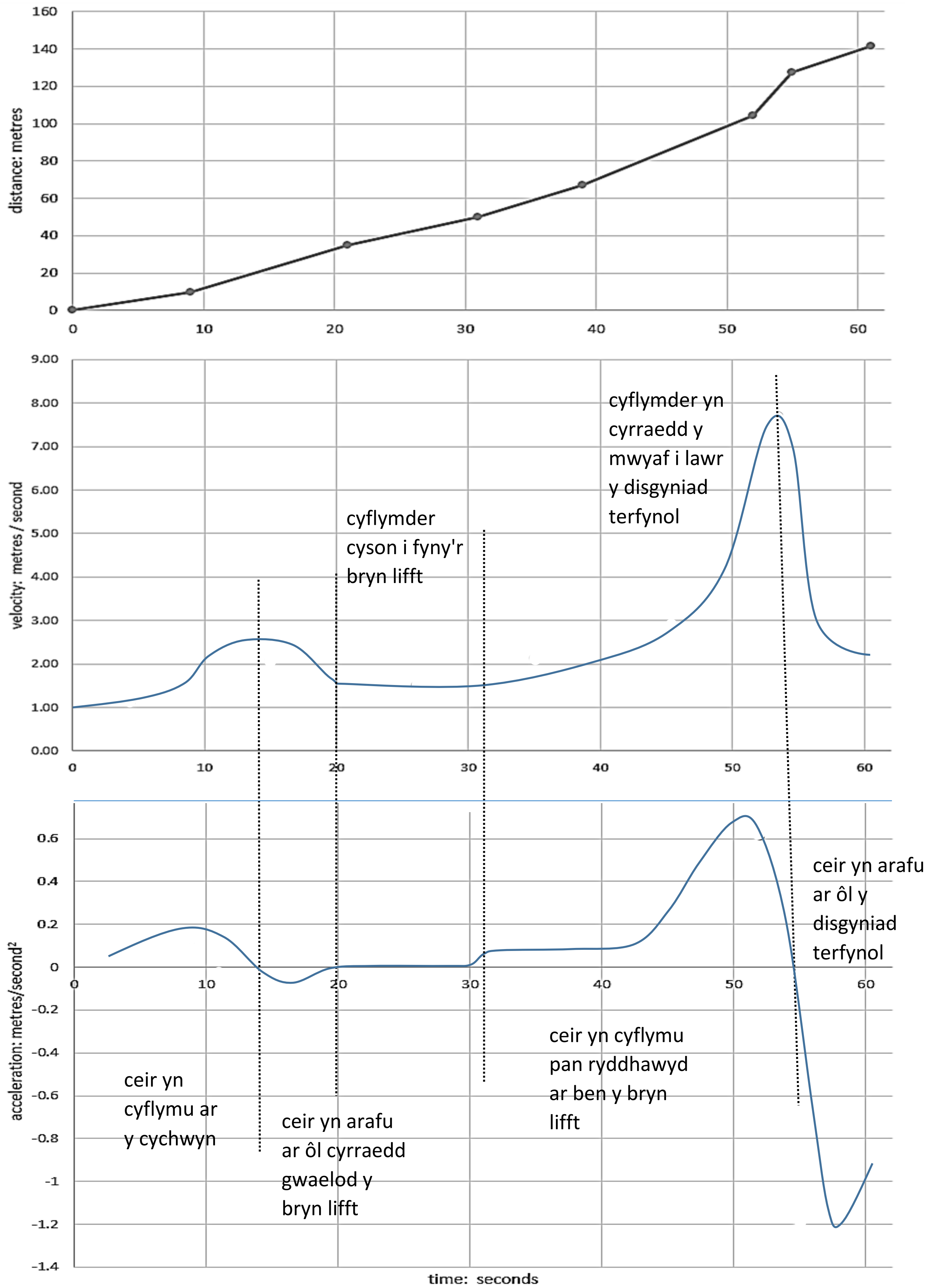
$$v = \int a.dt$$

Yn yr un modd, mae'r ardal o dan graff cyflymder yn cynrychioli pellter:

$$s = \int v.dt$$

Er y gall y siapiau'r cromliniau cyflymder a chyflymiad yn cael ei newid, dylem geisio peidio â newid cyfanswm arwynebedd o dan y cromliniau. Mae dehongliadau terfynol yn cael eu rhoi yn ffigwr 385 isod:

- Mae'r trên yn cyflymu i lawr llethr bach ar ôl gadael yr orsaf byrddio. Mae'r cyflymder yn cynyddu.
- Mae arafiad yn digwydd wrth i'r trên agosáu at waelod y bryn lifft. Mae'r trên wedyn yn esgyn gyda chyflymder cyson.
- Ar ben y bryn lifft, mae'r trên yn cael ei ryddhau i lawr graddiant ysgafn ac yn dechrau cyflymu.
- Mae'r rhan fwyaf serth y trac yn cael ei gyrraedd, a chyflymu yn gynnydd. Mae'r ceir yn cyrraedd eu cyflymder mwyaf.
- Ar waelod y disgyniad, y ceir yn dringo llethr byr ac yn talgrynnu cromlin lem, gan achosi arafiad cyflym cyn i'r orsaf byrddio yn cael ei gyrraedd ar ddiwedd y gylchdaith.



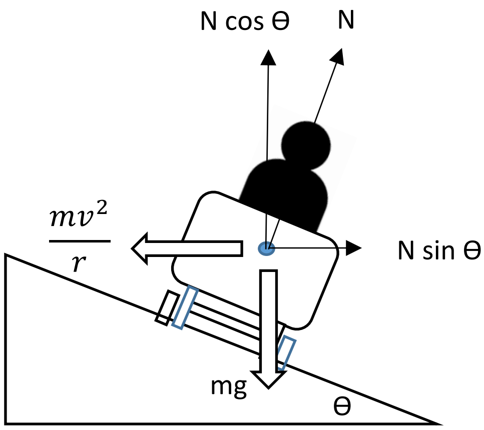
Ffigur 385: Dadansoddiad wedi ei chwblhau o fudiant y roller coaster

Mae'r gromlin derfynol yn cael ei gymryd ar gyflymder eithaf uchel. Mae cromliniau llym ac yn gyflym ar draciau roller coaster yn aml yn cael eu gogwyddo. Mae nifer o resymau da dros hyn.

- Wrth deithio o amgylch cromlin, mae effaith allgyrchol yn tueddu i ysgogi'r trên yn syth ymlaen i gyfeiriad y gorwel. Mae angen grym mewngyrchol er mwyn cynnal y tro ac yn cadw y ceir ar y trac. Mae'r grym yn cael ei ddarparu gan adwaith llorweddol rhwng y rheilen allanol a'r olwynion. Gall hyn arwain at fwy o ddirywiad anwastad ar y trac a berynnau echel o'r ceir. Mae bancio'r trac yn lleihau faint o rym llorweddol sy'n cael ei gymhwyso at yr olwynion car.
- Mae reidwyr ar drac llorweddol yn cael profiad o effaith allgyrchol sy'n taflu nhw i'r ochr wrth i'r trên rowndio gromlin ar gyflymder. Gall hyn fod yn anghyfforddus. Mae'r daith yn teimlo'n llyfn os yw'r trac yn cael ei fancio.

Yn ddelfrydol, dylai ongl bancio yn cael eu cymhwyso at y trac yn darparu'r grym troi yn union sydd ei angen i wrthsefyll effaith allgyrchol y gromlin. Yna bydd cerbydau yn rhedeg o amgylch y gromlin gyda grym lleiaf posibl i'r ochr yn erbyn yr olwynion, a reidwyr ddim yn profi eu tynnu i'r ochr.

Bydd ongl fancio yn dibynnu ar gyflymder y trên a radiws y gromlin. Mae angen ongl bancio fwy serth ar gyfer cyflymder uwch a chromlin dynnach. Grymoedd sydd angen eu hystyried yn cael eu dangos yn y ffigur 386:



Ffigur 386:

Grymoedd sy'n gweithredu ar roller coaster wrth deithio o amgylch cromlin ar oleddf

Mae dau rym yn gweithredu ar y car gan fynd o amgylch cromlin:

- Pwysau'r car, a roddwyd gan:

  $$mg$$

  lle yw ***m*** yn fàs y car a ***g*** yw'r cyflymiad oherwydd disgyrchiant o 9.8m/s^2.
- Yr effaith allgyrchol. Mae'n rhaid i hyn gael ei gydbwyso gan rym mewngyrchol er mwyn cadw'r car ar ei llwybr cylchol. Mae'r effaith allgyrchol a hefyd y grym mewngyrchol yn cael meintiau o:

  $$\frac{mv^2}{r}$$

  lle mae ***m*** unwaith eto màs y car, ***v*** yw ei gyflymder mewn m/s^2, ac ***r*** yw radiws y gromlin mewn metrau.

Os bydd y car yn teithio o amgylch y gromlin gyda union cyflymder ac ongl bancio gywir fel nad oes unrhyw rym i'r ochr, bydd holl rym y car fod i lawr i mewn i'r trac. Bydd hyn yn cael ei gydbwyso gan rym adwaith N sy'n gweithredu mewn cyfeiriad i fyny yn berpendicwlar i'r trac.

Gall y grym adwaith normal N yn cael ei rhannu yn ddwy elfen:

(1) Mae cydran fertigol yn cydbwyso pwysau'r car

$$N\cos\theta = mg$$

(2) Mae cydran lorweddol yn creu grym mewngyrchol:

$$N\sin\theta = \frac{mv^2}{r}$$

Aildrefnu'r hafaliad cyntaf yn rhoi mynegiad ar gyfer N o ran pwysau'r car ac ongl y bancio:

$$N = \frac{mg}{\cos\theta}$$

Mae amnewid ar ran N yn yr ail hafaliad yn rhoi:

$$\left(\frac{mg}{\cos\theta}\right)\sin\theta = \frac{mv^2}{r}$$

Fel mae $tan\,\theta = \ sin\,\theta / cos\,\theta$,

$$mg\ \tan\theta = \frac{mv^2}{r}$$

Mae canslo **m** ar y ddwy ochr ac ad-drefnu yn rhoi:

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$$

Erbyn hyn mae gennym hafaliad a fydd yn rhoi'r ongl bancio Θ sy'n ofynnol ar gyfer cromlin o radiws **r** a chyflymder car **v**.

Mae'r gromlin derfynol y roller coaster yn cael radiws o 4.5 metr. Mae'r trên yn arafu o 7.7 m/s at 2.3 m/s gan ei fod yn rowndio'r gromlin hon, fel y gallwn gymryd cyflymder cyfartalog o 5.0 m/s wrth i ganol rhan o'r trên yn mynd drwy'r gromlin. Yn defnyddio'r gwerthoedd hyn:

$$\tan\theta = \frac{5.0^2}{4.5 \times 9.8}$$

gan roi canlyniad i 29^{o} ar gyfer ongl bancio ofynnol. Yn ymarferol, bydd y cyflymder yn amrywio uwchlaw ac islaw 5.0 m/s, felly bydd angen rhywfaint o gymorth ffrithiannol i gadw y ceir ar y trac.

Y ffwythiant esbonyddol

Mae nifer o achosion mewn gwyddoniaeth lle mae **cyfradd newid** o ryw sylwedd mewn cyfrannedd â **maint** o'r sylwedd sy'n bresennol ar y pryd. Er enghraifft:

- Twf bacteria pan nad yw cyflenwad maetholion yn gyfyngedig. Mae'r gyfradd ychwanegu bacteria newydd at y nythfa yn dibynnu yn unig ar nifer o facteria sy'n atgynhyrchu.
- Dadfeiliad ymbelydrol, lle mae nifer o atomau sy'n dadfeilio yn dibynnu yn unig ar swm yr isotop ymbelydrol sy'n bresennol.
- Dadwefriad o gynwysorau electronig, lle mae'r gyfradd y mae gwefr yn gadael y cynhwysydd yn dibynnu ar faint o wefr sydd yn dal ei chynnal ar y platiau.

Byddwn yn edrych ar y prosesau hyn yn fanylach yn fuan, ond yn gyntaf byddwn yn ystyried mathemateg sylfaenol **twf a dirywiad esbonyddol**.

Tybiwch fod cyfradd newid, megis bod cynnydd yn y nifer o facteria yn hafal i'r swm ei hun. Gallwn arbrofi gyda thaenlen i geisio dod o hyd i ffwythiant mathemategol i ddisgrifio'r berthynas hon.

Fel dyfaliad cyntaf, gadewch i ni dybio bod rhai cyfnod amser yn bodoli fel bydd nifer o facteria yn dyblu ystod pob un o'r cyfnodau hyn:

amser	nifer o facteria	
1	2	
2	4	
3	8	
4	16	
5	32	…. ayyb.

Mae'r berthynas hon yn cael ei ddisgrifio gan yr hafaliad:

$$y = 2^x$$

lle mae **y** yw nifer o facteria ar adeg **x**.

Gellir cyfradd newid yn nifer y bacteria eu penderfynu yn rhifiadol gan ddefnyddio'r dull Euler:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{maint\ ar\ amser\ (n+1) - maint\ ar\ amser\ (n)}{cyfnod\ amser}$$

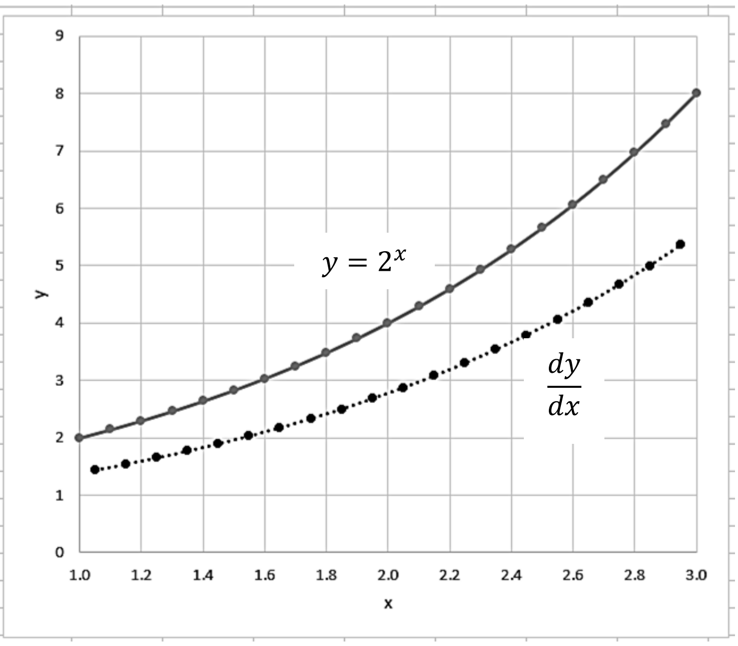
Graffiau o faint **y** a chyfradd newid $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}}$ wedi cael eu plotio yn ffigur 387 gan ddefnyddio ysbaid-x o 0.1 i roi cywirdeb rhesymol.

Fe'i ceir fod gwerth $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}}$ yn gyson llai na gwerth **y** ar gyfer unrhyw safle ar hyd yr echelin lorweddol. Mae hyn yn golygu bod y ffwythiant

$$y = 2^x$$

yn methu disgrifio yn gywir y sefyllfa lle mae cyfradd newid yn **hafal** i'r swm ei hun.

x	power(base, x)	gradient	mid point
1.0	2.000	1.435	1.05
1.1	2.144	1.538	1.15
1.2	2.297	1.649	1.25
1.3	2.462	1.767	1.35
1.4	2.639	1.894	1.45
1.5	2.828	2.030	1.55
1.6	3.031	2.176	1.65
1.7	3.249	2.332	1.75
1.8	3.482	2.499	1.85
1.9	3.732	2.679	1.95
2.0	4.000	2.871	2.05
2.1	4.287	3.077	2.15
2.2	4.595	3.298	2.25
2.3	4.925	3.535	2.35
2.4	5.278	3.788	2.45
2.5	5.657	4.060	2.55
2.6	6.063	4.352	2.65
2.7	6.498	4.664	2.75
2.8	6.964	4.999	2.85
2.9	7.464	5.357	2.95
3.0	8.000		



Ffigur 387: Graff y = 2^x a'i ddeilliad

Mae angen i ni ddod o hyd i ffwythiant a fydd yn caniatáu nifer y bacteria i gynyddu yn gyflymach. Gallwn ymchwilio'r ffwythiant:

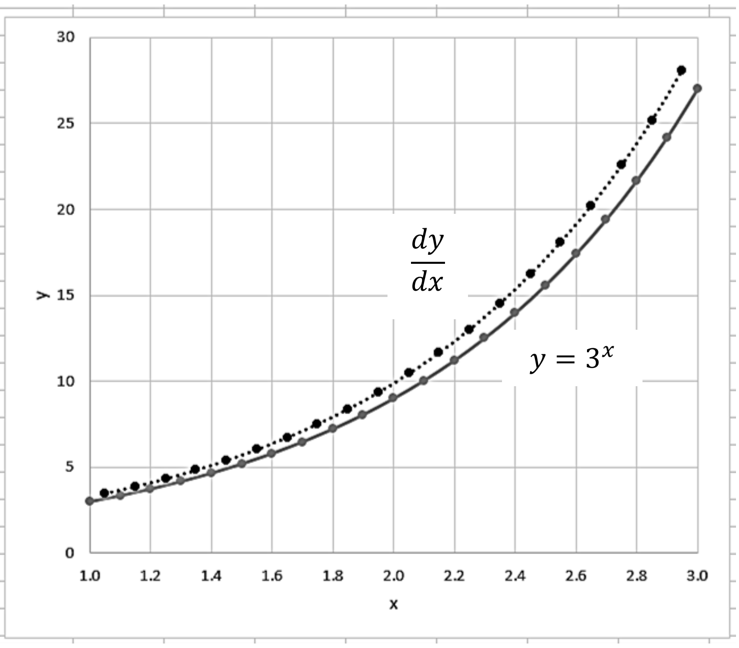
$$y = 3^x$$

sy'n tybio bydd y nifer o facteria yn treblu yn ystod pob cyfnod amser olynol:

amser	nifer o facteria	
1	3	
2	9	
3	27	
4	81	…. ayyb.

Graffiau o faint **y** a chyfradd newid $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}}$ ar gyfer y ffwythiant wedi cael eu plotio yn ffigur 388.

x	power(base, x)	gradient	mid point
1.0	3.000	3.484	1.05
1.1	3.348	3.888	1.15
1.2	3.737	4.340	1.25
1.3	4.171	4.844	1.35
1.4	4.656	5.406	1.45
1.5	5.196	6.034	1.55
1.6	5.800	6.735	1.65
1.7	6.473	7.517	1.75
1.8	7.225	8.390	1.85
1.9	8.064	9.364	1.95
2.0	9.000	10.451	2.05
2.1	10.045	11.665	2.15
2.2	11.212	13.019	2.25
2.3	12.514	14.531	2.35
2.4	13.967	16.218	2.45
2.5	15.588	18.102	2.55
2.6	17.399	20.204	2.65
2.7	19.419	22.550	2.75
2.8	21.674	25.169	2.85
2.9	24.191	28.091	2.95
3.0	27.000		

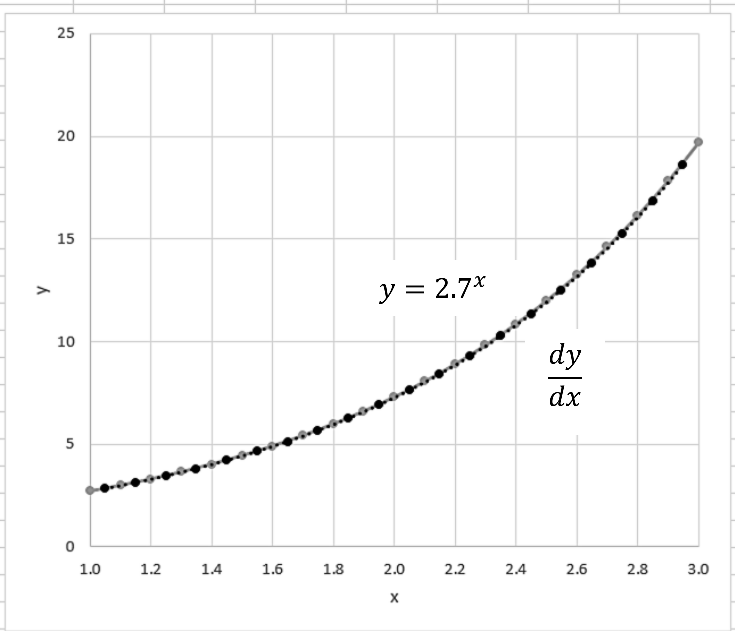


Ffigur 388: Graff y = 3^x a'i ddeilliad

Rydym bellach yn gweld bod gwerth $\frac{dy}{dx}$ yn gyson yn fwy na gwerth **y** ar gyfer unrhyw safle ar hyd yr echelin lorweddol. Mae'r ffwythiant y = 3^x eto yn methu i ddisgrifio'r sefyllfa lle mae cyfradd newid yn hafal i'r swm ei hun, ond mae'n agos at ganlyniad cywir.

Trwy arbrofi pellach, gwelwn fod y swm **y** a'i deilliad $\frac{dy}{dx}$ yn ymddangos i fod yn **gyfartal** ar gyfer yr holl safleoedd ar hyd yr echelin lorweddol pan fo pŵer y rhif 2.7 yn cael ei ddefnyddio.

x	power(base, x)	gradient	mid point
1.0	2.700	2.819	1.05
1.1	2.982	3.114	1.15
1.2	3.293	3.439	1.25
1.3	3.637	3.798	1.35
1.4	4.017	4.195	1.45
1.5	4.437	4.633	1.55
1.6	4.900	5.117	1.65
1.7	5.412	5.651	1.75
1.8	5.977	6.241	1.85
1.9	6.601	6.893	1.95
2.0	7.290	7.613	2.05
2.1	8.051	8.408	2.15
2.2	8.892	9.286	2.25
2.3	9.821	10.255	2.35
2.4	10.846	11.326	2.45
2.5	11.979	12.509	2.55
2.6	13.230	13.815	2.65
2.7	14.611	15.258	2.75
2.8	16.137	16.851	2.85
2.9	17.822	18.611	2.95
3.0	19.683		



Ffigur 389: Graff y = 2.7^x a'i ddeilliad

Mae hyn yn ganlyniad rhyfeddol y mae eu pwysigrwydd ni ellir gorbwysleisio. Rydym wedi dod o hyd i swyddogaeth:. Rydym wedi dod o hyd i ffwythiant:

$$y = \frac{dy}{dx} = 2.7^x$$

fel bod maint o rywfaint yn hafal i'r gyfradd newid yn y maint. Mae'r pŵer yr ydym wedi dod o hyd yn oddeutu 2.7 gellir ei gyfrifo yn gywir fel:

2.71828183…

Mae'r nifer hwn wedi cael ei ddiffinio fel y cyson ***e***, a enwyd er anrhydedd Euler:

$$Os\ yw \quad y = e^x,\ \ yna\ \ \frac{dy}{dx} = e^x$$

Problemau lle mae'r **gyfradd newid** o riw deunydd mewn cyfrannedd â **maint** y deunydd presennol ar y pryd yn aml yn cael eu datrys yn ddadansoddol gan ddefnyddio'r ffwythiant esbonyddol y = e^x, neu ryw amrywiad ar ffwythiant hon.

Twf bacteria

Gallwn edrych nawr yn fanylach ar dwf cytref o facteria ar gyfrwng newydd blannu mewn arbrawf labordy. Byddai'r broses fel arfer yn cynnwys pedwar cam:

- **Cam oediad**, ar y cychwyn pan mae nifer y bacteria yn aros yn gyson. Yn ystod y cyfnod hwn mae gwahanol brosesau yn cael eu cynnal, megis y synthesis o ensymau, sy'n angenrheidiol ar gyfer twf i ddechrau.
- **Cam esbonyddol**, heb ffactorau ataliol a bacteria yn gallu atgynhyrchu yn hawdd.
- **Cam llonydd**, pan twf yn arafu ac yn atal yn y pen draw. Gall hyn fod oherwydd prinder yn y cyflenwad maetholion, y cronni o ddeunyddiau gwastraff o fetaboledd gell, neu yn syml drwy gyfyngiad o le ar gyfer y nythfa i dyfu ymhellach.
- **Marwolaeth**, lle mae'r disbyddu o faetholion a chroniad o ddeunyddiau gwastraff yn achosi cwymp ym mhoblogaeth facteria.

Byddwn yn canolbwyntio ar y ddau gam ganol y broses, gan fod y twf esbonyddol cychwynnol yn arafu wedyn i gynhyrchu poblogaeth gyson derfynol. Os byddwn yn cymryd yn ganiataol bod maint y boblogaeth olaf yn perthyn i gysonyn **K**, ac mae nifer y bacteria sy'n bresennol ar amser **t** yw $\mathbf{N_t}$, gallwn sefydlu berthynas gylchol:

$$N_{t+1} = \lambda N_t \left(1 - \frac{N_t}{K}\right)$$

Mae'r hafaliad hwn yn cyfrifo nifer o facteria a fydd yn bresennol yn y cyfwng y tro nesaf, $\boldsymbol{N_{t+1}}$, yn seiliedig ar y nifer sy'n bresennol ar hyn o bryd, $\boldsymbol{N_t}$. Mae'r cysonyn **λ** yn rheoli'r gyfradd twf yn ystod cyfnod amser: os yw **λ** yn fawr yna bydd y bacteria ei atgynhyrchu yn gyflymach.

Ar ddechrau'r cyfnod twf esbonyddol, bydd nifer y bacteria yn isel iawn o'i gymharu â maint y boblogaeth derfynol. Mae'r term $\boldsymbol{N_t}$ / **K** yn ddibwys, felly mae'r hafaliad yn symleiddio i:

$$N_{t+1} = \lambda N_t$$

Mae hyn yn cynrychioli twf esbonyddol, lle mae'r cynnydd mewn bacteria yn ystod pob cam amser yn union mewn cyfrannedd â'r nifer o facteria eisoes yn bresennol.

Gan fod y nythfa yn cynyddu, mae'r term $\boldsymbol{N_t}$ / **K** yn dod yn fwy, fel bod y term lluosi yn y cromfachau yn cael ei ostwng i ffracsiwn llai na 1. Yn y pwynt lle:

$$\lambda \times \left(1 - \frac{N_t}{K}\right) = 1$$

$\lambda\ yn\ fwy\ nag\ 1$

$1 - \frac{N_t}{K}\ yn\ llai\ nag\ 1$

wedyn:

$$N_{t+1} = N_t$$

ac mae'r boblogaeth yn aros yn gyson o un cam tro i'r nesaf.

Mae'r sefyllfa hon yn ei ddangos yn ffigwr 390, gan ddefnyddio'r gwerthoedd:

λ = 2
K = 1 000 000

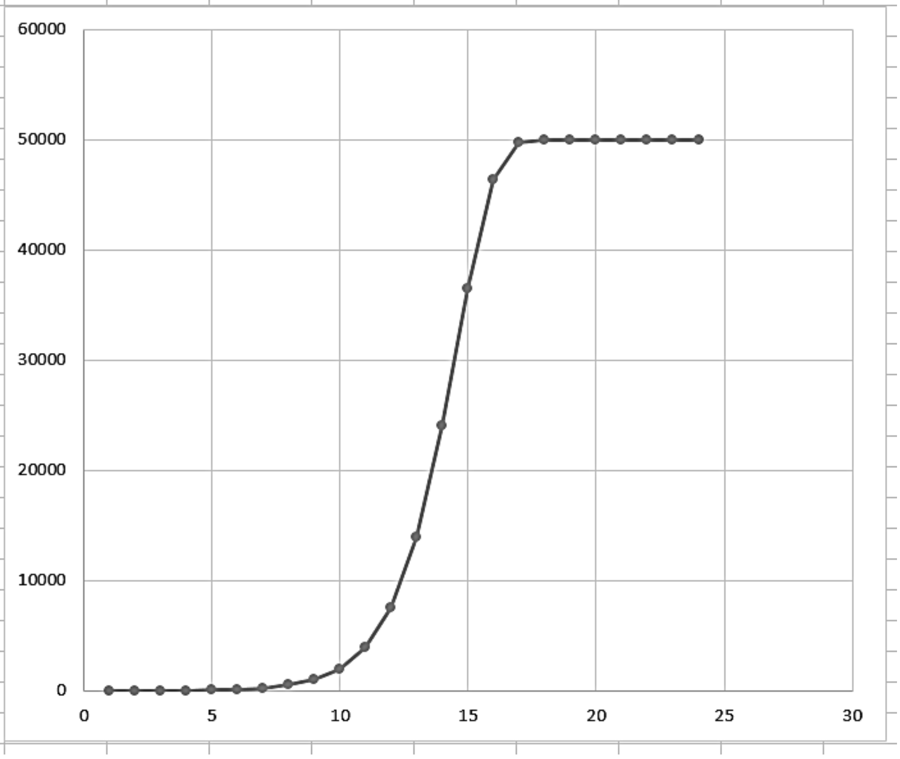
Felly, ar y pwynt cydbwysedd,

$$2 \times \left(1 - \frac{N_t}{1\ 000\ 000}\right) = 1$$

$$\frac{N_t}{1\ 000\ 000} = 0.5$$

felly $\boldsymbol{N_t}$ = 500 000. Mae siâp graff a gynhyrchir yn cael ei adnabod fel cromlin **logistaidd**.

	λ	2
	K	100000
t	N	
1	4	
2	7.99968	
3	15.99808	
4	31.99104	
5	63.96161	
6	127.8414	
7	255.3559	
8	509.4078	
9	1013.626	
10	2006.702	
11	3932.868	
12	7556.387	
13	13970.79	
14	24037.93	
15	36519.41	
16	46365.48	
17	49735.8	
18	49998.6	
19	50000	
20	50000	
21	50000	
22	50000	
23	50000	
24	50000	



Ffigur 390: Cromlin logistaidd ar gyfer twf poblogaeth facteria gan ddefnyddio datrysiad rhifiadol

Rydym wedi archwilio'r ffwythiant logistaidd gan ddefnyddio ymagwedd rifiadol, ond mae ateb dadansoddol gan algebra hefyd yn bosibl. Man cychwyn yw'r hafaliad:

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N \left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

sy'n nodi bod cyfradd y cynnydd yn y boblogaeth bacteria mewn cyfrannedd â nifer presennol o facteria luosi gan y term braced:

$$\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

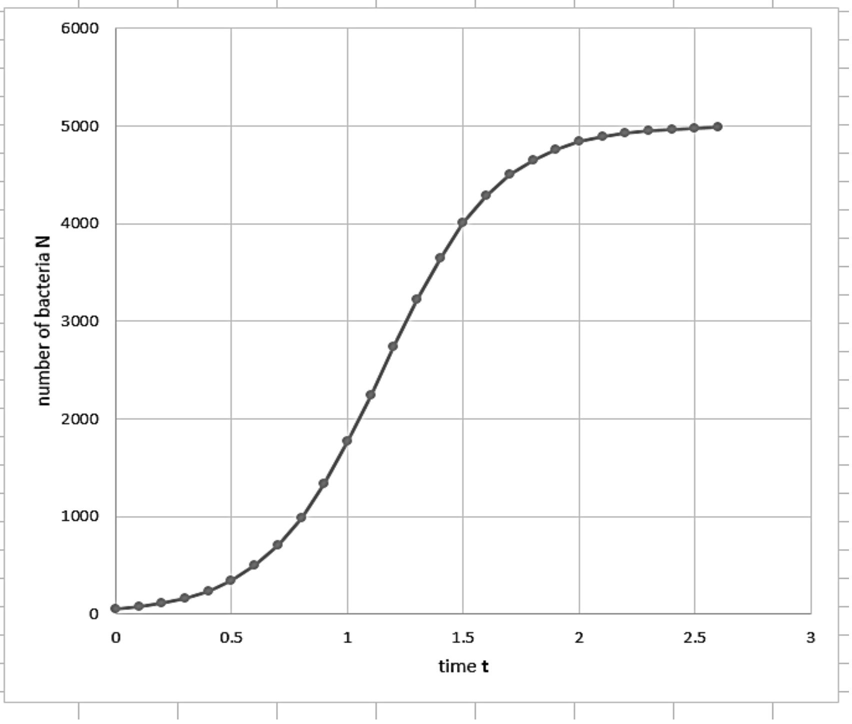
sydd yn lleihau yn gynyddol wrth i'r boblogaeth dynesu at ei werth cyfyngol.

Trwy gyfrwng technegau calcwlws sydd y tu hwnt i gwmpas y llyfr hwn, ond gellir canfod mewn gwerslyfrau mathemateg lefel uwch, gall yr hafaliad logistaidd yn cael eu hintegreiddio i roi:

$$N = \frac{Ce^{\lambda t}}{1 + \frac{C}{K}e^{\lambda t}}$$

Mae hyn yn defnyddio ffwythiannau esbonyddol i gyfrifo nifer y bacteria **N** fyddai'n bresennol yn y boblogaeth ar unrhyw adeg **t**. Mae **C** yn gysonyn arall y mae ei gwerth yn cael ei darganfod yn ystod yr integreiddio, ac yn dibynnu ar y niferoedd cychwynnol a therfynol o facteria yn y boblogaeth. Mae graff enghreifftiol wedi cael ei phlotio gyda'r hafaliad hwn yn ffigur 391 isod:

C	50
K	5000
λ	4
t	N
0	50
0.1	73
0.2	109
0.3	161
0.4	236
0.5	344
0.6	496
0.7	706
0.8	985
0.9	1340
1	1766
1.1	2244
1.2	2743
1.3	3222
1.4	3650
1.5	4007
1.6	4288
1.7	4499
1.8	4653
1.9	4762
2	4838



Ffigur 391: Cromlin logistaidd ar gyfer twf poblogaeth bacteria gan ddefnyddio'r datrysiad dadansoddol

Dyddio carbon

Mae dyddio carbon wedi dod yn dechneg archeolegol bwysig ar gyfer penderfynu oed sgerbydau, neu arteffactau a wnaed o ddeunyddiau planhigion neu anifeiliaid megis dodrefn pren neu ddogfennau ysgrifenedig ar groen anifeiliaid. Gellir hefyd ei ddefnyddio i bennu oedran o ddeunyddiau planhigion ac anifeiliaid a gedwir mewn ffurfiannau daearegol gymharol ifanc megis gwaddodion o Oes yr Iâ.

Mae carbon yn bodoli yn naturiol fel dau isotop: ^{12}C sydd yn sefydlog, a ^{14}C sy'n ansefydlog ac yn dioddef dadfeiliad ymbelydrol i ^{12}C. Mae'r gymhareb o ^{12}C i ^{14}C yn y carbon deuocsid yn yr atmosffer yn agos at gyson. Mae'r un gymhareb isotop carbon yn cael ei gweld yn y cyfansoddion organig o organebau byw, a gynhyrchwyd yn uniongyrchol gan ffotosynthesis neu lyncu fel sylweddau bwyd.

Ar ôl marwolaeth yr organeb, doedd dim rhagor o drosglwyddo carbon o'r amgylchedd yn digwydd. Mae atomau o ^{14}C yn dadfeilio i ^{12}C ar gyfradd wedi ei nabod. Gall nifer y blynyddoedd ers marwolaeth yr organeb, felly, yn cael ei gyfrifo trwy gymharu isotop carbon presennol y deunydd ei chadw i gymhareb isotop carbon ar yr adeg y mae'r organeb yn byw.

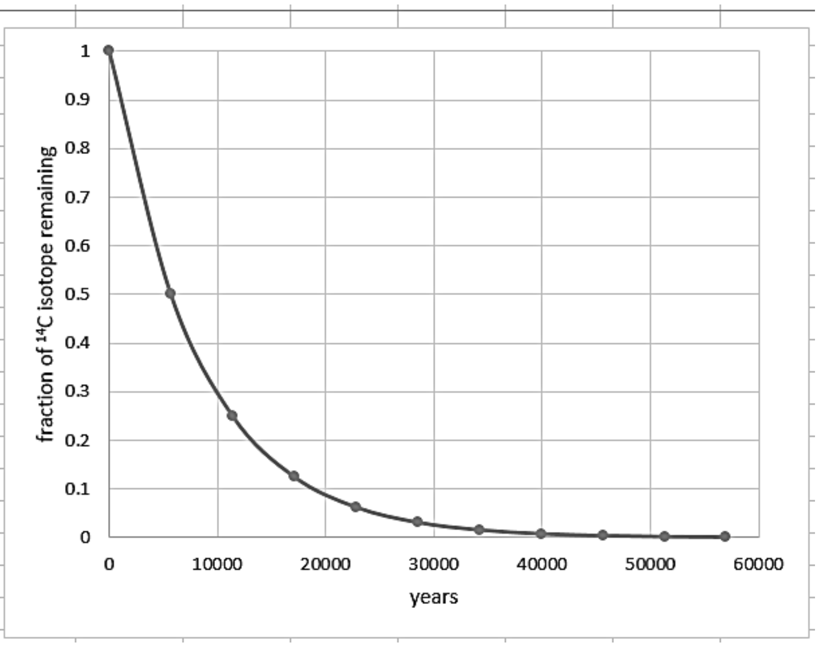
Mae **hanner-oes** ar gyfer y broses bydru ^{14}C yn nabod i fod 5,700 o flynyddoedd. Ar ôl y cyfnod hwn, byddai maint gwreiddiol o ^{14}C yn cael ei haneru. Ar ôl hanner oes bellach o 5,700 mlynedd, byddai maint y ^{14}C ei haneru eto. Dylem nodi bod y gyfradd newid yn y swm o ^{14}C ar unrhyw adeg yn gymesur â faint o ^{14}C yn dal yn bresennol, felly:

$$\frac{dy}{dt} = -\lambda y$$

lle mae **y** yn cynrychioli'r swm o ^{14}C ac **λ** yn gysonyn sy'n cynrychioli cyfradd ddadfeilio.

Gall gostyngiad yn y cynnwys isotop ^{14}C o sampl dros gyfnod o amser yn cael ei gyfrifo yn rhifiadol gan ddefnyddio taenlen, fel yn ffigwr 392 isod.

	half life	5700
half-lives	years	^{14}C isotope
0	0	1
1	5700	0.5
2	11400	0.25
3	17100	0.125
4	22800	0.0625
5	28500	0.03125
6	34200	0.015625
7	39900	0.0078125
8	45600	0.00390625
9	51300	0.00195313
10	57000	0.00097656



Ffigur 392: Cromlin esbonyddol negyddol ar gyfer ddadfeiliad ymbelydrol ^{14}C

Fel arall, gall technegau algebraidd yn cael ei ddefnyddio i gael y fformiwla:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

ble ***N(t)*** yw nifer y gramau o ^{14}C dal yn y sampl ar amser ***t***, $\boldsymbol{N_0}$ yw'r nifer gwreiddiol o gram o ^{14}C yn y deunydd byw, a **λ** yn gysonyn y gellir ei gyfrifo o'r hanner-oes.

Mae'n werthfawr i fyfyrwyr weld sut mae'r hafaliad hwn ei deillio, er mwyn iddynt fagu gwerthfawrogiad o'r modd bod dulliau dadansoddol yn cael eu defnyddio mewn calcwlws. Rydym yn dechrau gyda datganiad bod y gyfradd o ddadfeiliad atomau ^{14}C mewn union gyfrannedd â'r nifer sy'n bresennol:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda\, N$$

Telerau ymwneud i N cael eu symud i'r chwith o'r arwydd hafal. Gelwir hyn yn gwahanu newidynnau:

$$\frac{dN}{N} = -\lambda\, dt$$

Yna, byddwn yn sefydlu integrynnau ar bob ochr i'r hafaliad. Gan fod **λ** yn gysonyn, gellir ei adael y tu allan yr integryn:

$$\int \frac{1}{N} dN = -\,\lambda \int dt$$

Mae'r integryn o **$^1/_N$** mewn perthynas â **N** ei gael mewn tablau o integrynnau safonol, ac mae ganddo gwerth **$\log_e$ N**. Mae'r integryn ar y llaw dde o ran **t** yn wag, felly mae'n cymryd y gwerth **t**. Mae hyn yn rhoi:

$$log_e N = -\lambda t + C$$

Sylwch fod cysonyn wedi ei ychwanegu. Rhaid i wneud hyn bob amser pan fydd integreiddio yn cael ei wneud. Nawr mae angen i ni ddod o hyd i werth y cyson hwn. Rydym yn gweld bod y nifer o ^{14}C atomau ar amser **t** = 0 yw **N_0**. Amnewid yn yr hafaliad blaenorol yn rhoi:

$$log_e N_0 = C$$

Yna, gallwn amnewid y gwerth **$\log_e N_0$** am **C**:

$$log_e N = -\lambda t + log_e N_0$$

$$log_e N - \ log_e N_0 \ = -\lambda t$$

Gan ddefnyddio'r briodwedd logarithmau mai **log A** – **log B** = **log (A/B)**, rydym yn cael:

$$log_e \left(\frac{N}{N_0}\right) \ = -\lambda t$$

Rydym bellach yn codi bob ochr i'r hafaliad i bŵer ***e***. Mae hyn yn cael effaith o wrthdroi a chael gwared ar y ffwythiant logarithm, gan roi:

$$\frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t}$$

Gall hafaliad hyn yn cael ei aildrefnu i roi'r ateb eu hangen:

$$N = N_0\, e^{-\lambda t}$$

Ar gyfer defnydd ymarferol o'r dull dyddio carbon, mae angen i adnabod cymhareb ^{14}C i ^{12}C ar gyfer yr organeb ar ei adeg marwolaeth, a hefyd mae angen mesur y gymhareb bresennol o ^{14}C i ^{12}C gywir. Mae'r ddau o'r gofynion hyn yn amodol ar rai camgymeriad, felly'r oed terfynol a gyfrifwyd yn ei ddatgan fel arfer fel o fewn ystod o ddyddiadau posibl.

Mae ein myfyrwyr wedi cael profiad ymarferol diddorol o ddefnyddio dyddio carbon yn ystod ymchwiliad daearegol ac ecolegol o ardal eang o orgors mawn yn ardal ffynhonnell fynyddig Afon Mawddach yn Eryri. Mewn mannau, mae'r mawn wedi cael ei erydiad, yn datgelu haen o wreiddiau coed ar y gwaelod.

Uchod: dyddodion mawn erydu.

Chwith: haen o wreiddiau coed o dan haen graean mân ar waelod y mawn.

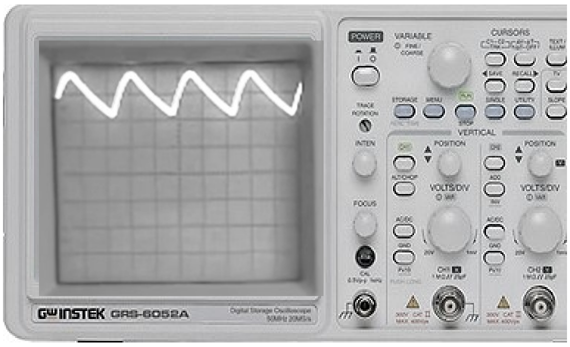
Y dde: manylyn o'r gwreiddiau coed yn y mawn.

Ffigur 393: Haen o wreiddiau coed ar waelod dyddodion mawn, Waen y Griafolen, Gogledd Cymru

Roedd sampl o haen wreiddiau coed ei gyflwyno i'r Uned Cyflymydd Radiocarbon Prifysgol Rhydychen ar gyfer dyddio. Cafwyd canlyniad o oes 8905 ± 45 mlynedd cyn y flwyddyn cyfeirnod o 1950. Mae'r dyddiad yn cynrychioli dychwelyd cynharaf o dwf goedwigoedd ar ucheldiroedd gorllewin Prydain yn dilyn diwedd Oes yr Iâ (Bellamy, 1986). Mae'r gwreiddiau yn debygol o fod gwernen, oedd yn bresennol yn Eryri ar adeg o 8,700 b.p. (Chambers a Price, 1985). Ar orwel ychydig yn uwch o fewn y mawn canfod canghennau bedw wedi cael eu cludo gan dŵr. Rydym wedi dod i'r casgliad bod ddatblygwyd yr orgors ar safle llyn bas eang gordyfu gan goetir gwlyb. Ymddengys bod croniad mawn wedi parhau heb fawr o ymyrraeth ar gyfer y 9,000 o flynyddoedd diwethaf, gyda mwsoglau, grug a chorlwyni eraill fel y prif lystyfiant.

Gwefru a dadwefru cynhwysydd

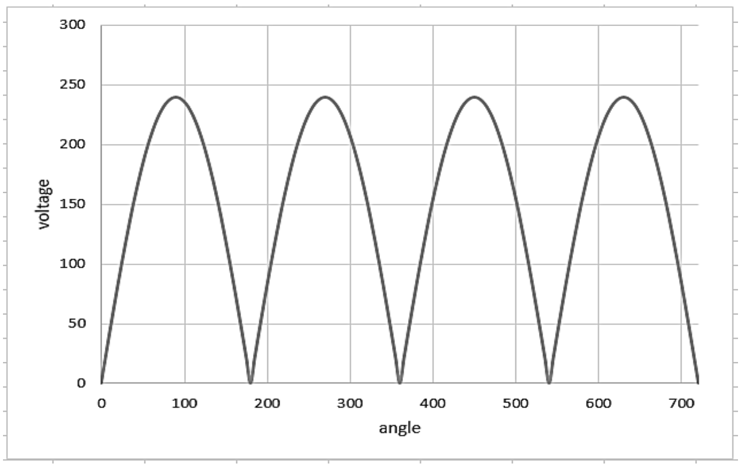
Ym mhennod 6, Mesur, buom yn edrych ar arbrawf gweithdy mewn electroneg i gynhyrchu cylched unionydd llawn-don. Roedd hyn yn cynnwys dampio y foltedd allbwn drwy gynhwysydd, gan arwain at effaith crychdon wrth edrych ar sgrin osgilosgop:



Ffigur 394:

osgilosgop yn arddangos y foltedd allbwn o'r gylched unionydd llawn-don

Byddwn nawr yn sefydlu model taenlen i efelychu allbwn ar gyfer gylched hon. Rydym yn dechrau gydag unionydd bont sy'n cynhyrchu allbwn ton sin o gopaon positif:



Ffigur 395:

allbwn tonnau sin bositif gan y unionydd bont

Yn ystod y cyfnod pan fod y foltedd yn agos ei anterth, gall y wefr drydanol yn y cynhwysydd llyfnu yn cael ei hail-lenwi. Mae'r wefr hon wedyn ar gael i ychwanegu at allbwn y gylched pan fydd y foltedd yn disgyn. Fodd bynnag, mae'r allbwn foltedd oddi wrth y cynhwysydd ei hun yn disgyn fel gwefr yn cael ei golli. Gall y gostyngiad mewn foltedd y cynhwysydd gydag amser **t** yn cael ei chyfrifo gan hafaliad esbonyddol negyddol tebyg yn batrwm i'r hafaliad dadfeiliad ymbelydrol:

$$V(t) = V_0\, e^{-(t/RC)}$$

V(t) yw'r foltedd ar amser **t**, **V_0** yw'r foltedd pan fod y cynhwysydd ei wefru'n llawn, **R** yw'r gwrthiant cylched, a **C** yw'r cynhwysiant. Gallwn ddiddwytho bydd y pŵer ***e*** yn fwy, a bydd y foltedd felly'n gostwng yn gyflymach, os yw'r gwrthiant neu'r cynhwysiant yn y gylched yn isel. Gall taenlen i efelychu allbwn unionydd yn cael ei sefydlu gan ddefnyddio'r camau canlynol:

- Cysonion yn cael eu neilltuo i bennu'r foltedd brig **V_0** o 240V, gwrthiant **R** gyda gwerth nodweddiadol o 1000 Ω, a chynhwysiant **C** o 0.0001 F. Onglau foltedd **ϴ** gyfer y cerrynt eiledol yn cael eu sefydlu ar gyfnodau 5^0 o 0^0 i 720^0.
- Mae allbwn tonnau sin ei gyfrifo gan ddefnyddio:

$$V = V_0 \sin\theta$$

- Mae tonnau sin yn cael eu hunioni i gynhyrchu dim ond copaon positif trwy gyfrwng y ffwythiant daenlen ABS( ), sydd yn trosi unrhyw werthoedd negyddol at eu cyfwerth positif.
- Diffinnir ongl **ф** sy'n cyfrif i fyny yn yr un ffordd a **ϴ**, ond yn cael ei ailosod i sero ar ôl pob brig ton sin. Mae'r ongl yn cael ei gyfrifo o **ϴ** gan ddefnyddio'r ffwythiant taenlen MOD:

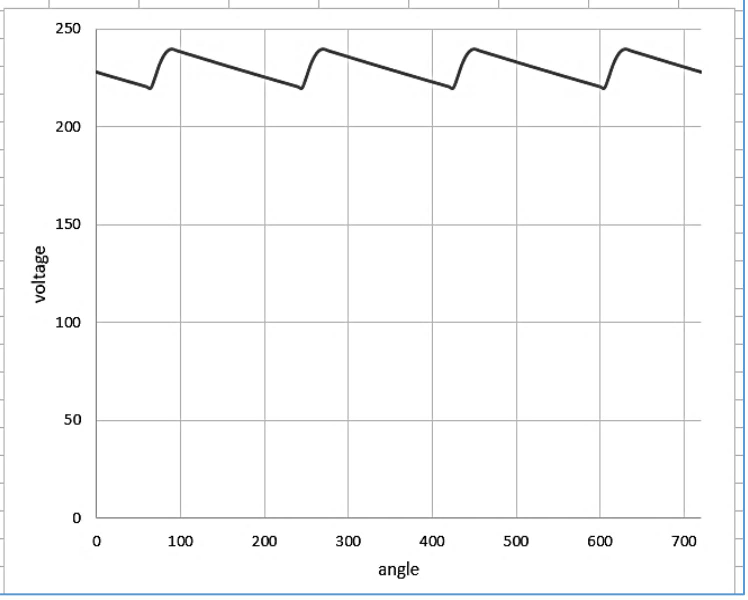
$$\varphi = MOD((\Theta+90),\ 180)$$

- Mae'r onglau **ф** yn cael eu trosi i amseroedd **t** mewn eiliadau, yn seiliedig ar amledd cerrynt eiledol o 50Hz. Bydd pob cylch o 360^0 yn cynrychioli 1 / 50^{fed} o eiliad.
- Yna mae foltedd allbwn y cynhwysydd yn cael ei gyfrifo gan ddefnyddio'r hafaliad:

$$V(t) = V_0\, e^{-(t/RC)}$$

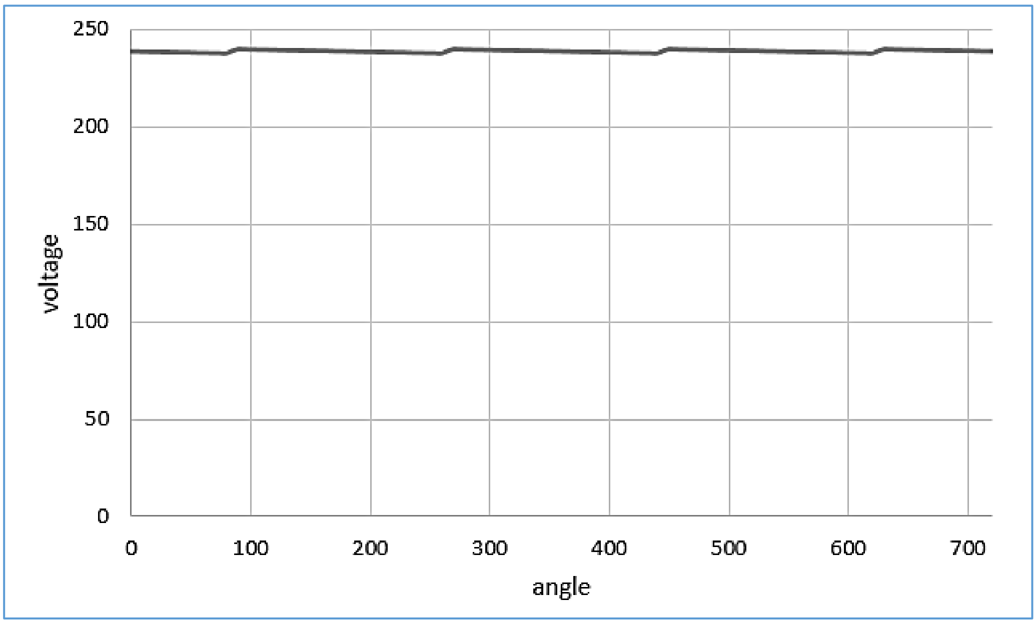
- Yn olaf, mae'r ffwythiant daenlen **IF** yn cael ei ddefnyddio i gymharu tonnau a folteddau cynhwysydd sin cywiro, ac yna dewis yr uchaf o'r ddau am allbwn i'r graff.

			R	1000	C	0.0001
amplitude	240					
			capacitor			
angle	sine wave	rectified	t	voltage	output	
0	0	0	0.005	228.2951	228.2951	
5	20.91738	20.91738	0.005278	227.6618	227.6618	
10	41.67556	41.67556	0.005556	227.0303	227.0303	
15	62.11657	62.11657	0.005833	226.4005	226.4005	
20	82.08483	82.08483	0.006111	225.7725	225.7725	
25	101.4284	101.4284	0.006389	225.1462	225.1462	
30	120	120	0.006667	224.5217	224.5217	
35	137.6583	137.6583	0.006944	223.8989	223.8989	
40	154.269	154.269	0.007222	223.2778	223.2778	
45	169.7056	169.7056	0.0075	222.6584	222.6584	
50	183.8507	183.8507	0.007778	222.0408	222.0408	
55	196.5965	196.5965	0.008056	221.4249	221.4249	
60	207.8461	207.8461	0.008333	220.8107	220.8107	
65	217.5139	217.5139	0.008611	220.1981	220.1981	
70	225.5262	225.5262	0.008889	219.5873	225.5262	
75	231.8222	231.8222	0.009167	218.9782	231.8222	
80	236.3539	236.3539	0.009444	218.3708	236.3539	
85	239.0867	239.0867	0.009722	217.765	239.0867	
90	240	240	0	240	240	
95	239.0867	239.0867	0.000278	239.3343	239.3343	
100	236.3539	236.3539	0.000556	238.6704	238.6704	



Ffigur 396: Efelychu taenlen o'r gylched unionydd llawn-don

Mae'r daenlen a gwblhawyd ar gyfer efelychu cylched unionydd yn ffigur 396 uchod. Gall y gwerthoedd cychwynnol a osodwyd ar gyfer gwrthiant a chynhwysiant y cylched nawr yn cael ei amrywio i ymchwilio effeithiau ar allbwn cylched. Gwelir gall crychdon yn y foltedd yn cael ei dileu yn effeithiol trwy ddewis cynhwysydd ddigon mawr.



Ffigur 397: Efelychiad o gylched unionydd lawn-don gyda chynhwysiant mawr

Siapiau solid

Un defnydd pwysig o integreiddio yw dod o hyd i'r cyfaint ac arwynebedd siapiau solet.

Fel enghraifft, mae problem geometregol wedi cael ei ddefnyddio i gyflwyno myfyrwyr peirianneg i galcwlws ar ddechrau eu cwrs. Gofynnir i fyfyrwyr i amcangyfrif cyfaint côn yng nghanol ffan cymeriant peiriant jet (ffigur 398):

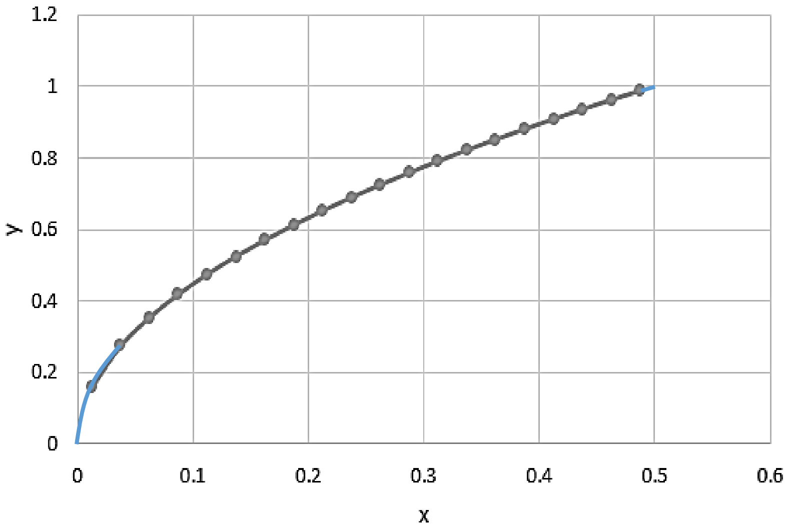
Ffigur 398:

Peiriant awyren yn dangos y ffan cymeriant awyr

Mae'r rhan ganol gonigol o ffan yn cael dyfnder o 0.5m. Mae proffil y côn yn dilyn y ffwythiant mathemategol:

$$y = \sqrt{2x}$$

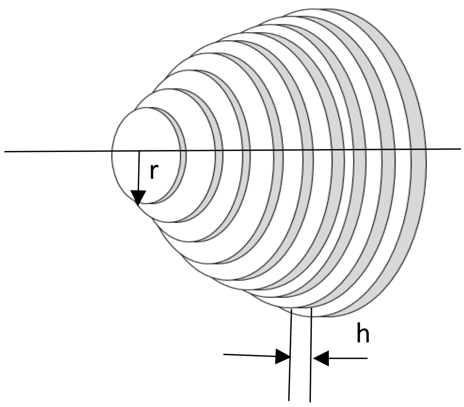
Dywedwyd wrth y myfyrwyr bod angen cael cyfaint y côn, fel y gellid ei màs yn cael ei gyfrifo ar gyfer modelu cylchdro'r ffan.



Ffigur 399:

Proffil côn canolog y ffan cymeriant awyr

Mewn trafodaeth gyda'r grwp o fyfyrwyr, cytunwyd y gallai'r cyfaint gael ei amcangyfrif drwy rannu'r côn i mewn i gyfres o silindrau yn rhychwantu'r ystod **x** o 0 i 0.5m, gyda'r cyfeintiau eu cyfrifo mewn taenlen ac wedyn eu hychwanegu i gael cyfanswm:



$$cyfaint = \sum_{0}^{0.5} \pi r^2 h$$

Ffigur 400: Brasamcan cyfaint y côn fel cyfres o ddisgiau

Mae canlyniadau'r cyfrifiad daenlen yn cael eu dangos yn ffigur 401 isod.

Mae dull amgen dadansoddol ar gyfer datrys y broblem hon unwaith eto yn cynnal integreiddio disgiau tenau dros yr ystod x-werthoedd o 0 i 0.5m:

$$\int_{0}^{0.5} \pi r^2 \, . dx \quad = \quad \pi \int_{0}^{0.5} \left(\sqrt{2x}\right)^2 . dx \quad = \quad \pi \int_{0}^{0.5} 2x \, . dx$$

Mae π yn gysonyn, felly gall eu tynnu oddi ar yr integryn.

Gan ddefnyddio dulliau sydd i'w gweld mewn gwerslyfrau mathemateg lefel uwch:

$$\pi \int_0^{0.5} 2x \,.\, dx \;=\; \pi \,[x^2]_0^{0.5}$$

$$= \pi\,[0.5^2 - 0^2]$$

$$= 0.25\pi$$

$$= 0.7854\ m^3$$

Mae'n braf bod yr ateb a geir gan y dull daenlen rhifiadol a'r ateb fformiwla dadansoddol yn cytuno ag o leiaf bedwar lle degol. Mae hyn yn rhoi hyder y gall dulliau rhifiadol rhoi atebion ymarferol i broblemau calcwlws os ymagwedd ddadansoddol yn profi i fod yn anodd.

y	mean y	radius	volume		
0	0.0125	0.158114	0.001963		
0.025	0.0375	0.273861	0.00589		
0.05	0.0625	0.353553	0.009817		
0.075	0.0875	0.41833	0.013744		
0.1	0.1125	0.474342	0.017671		
0.125	0.1375	0.524404	0.021598		
0.15	0.1625	0.570088	0.025525		
0.175	0.1875	0.612372	0.029452		
0.2	0.2125	0.65192	0.033379		
0.225	0.2375	0.689202	0.037306		
0.25	0.2625	0.724569	0.041233		
0.275	0.2875	0.758288	0.04516		
0.3	0.3125	0.790569	0.049087		
0.325	0.3375	0.821584	0.053014		
0.35	0.3625	0.851469	0.056941		
0.375	0.3875	0.880341	0.060868		
0.4	0.4125	0.908295	0.064795		
0.425	0.4375	0.935414	0.068722		
0.45	0.4625	0.961769	0.072649		
0.475	0.4875	0.987421	0.076576		
0.5					
		total	0.785398	m^3	

Ffigur 401: Ateb rhifiadol i'r broblem peiriant awyren

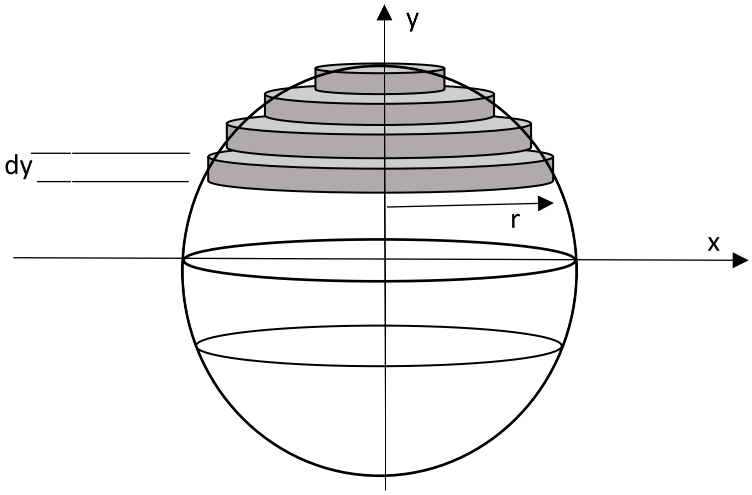
Cyfaint sffêr

Mae fformiwla gyfarwydd o TGAU mathemateg yw cyfaint sffêr:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

lle mae **R** yn radiws y sffêr. Heb wybod y fformiwla hon, mae calcwlws ein galluogi i weithio o'r egwyddorion cyntaf i bennu maint unrhyw sffêr trwy ddulliau rhifiadol. Yn wir, gall y fformiwla ei hun fod yn deillio gan dechnegau calcwlws, fel y byddwn yn dangos.

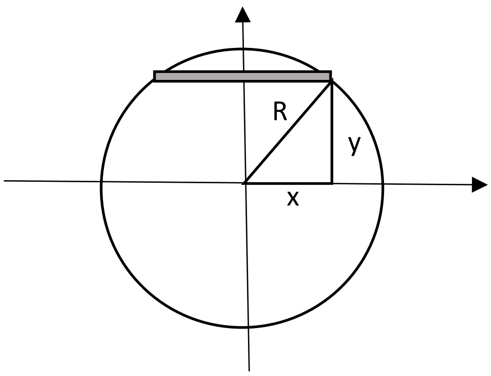
I ganfod cyfaint sffêr heb y defnydd o'r fformiwla gyfrol, rydym yn dechrau drwy rannu'r sffêr yn gyfres o ddisgiau tenau mewn ffordd debyg i'r broblem peiriant awyren:



Ffigur 402:

Cynrychiolaeth o sffêr fel cyfres o ddisgiau tenau

Fel enghraifft, byddwn yn cymryd radiws y sffêr i fod yn 3.5cm. Mae datrysiad rhifol yn ffigur 404 isod. Hemisffer uchaf wedi ei rannu yn 20 ddisgiau. Radiws pob disg yn cael ei gymryd fel cymedr y radiws yn arwynebau uchaf ac isaf y ddisg. Rydym yn cyfrifo pob radiws gan ddefnyddio theorem Pythagoras:



Ffigur 403:

Penderfynu ar radiws y disg o fewn cylch drwy ddefnyddio theorem Pythagoras

Os byddwn yn nodi'r uchder **y** o'r ddisg uwchben gwaelod yr hemisffer, mae'r radiws **r** y ddisg ei roi gan:

$$r = \sqrt{R^2 - y^2}$$

Yna gall y cyfaint o bob disg yn cael ei gyfrifo fel:

$$v = \pi r^2 t$$

lle mae **t** trwch y ddisg. Mae'r cyfeintiau a gyfrifwyd ar gyfer yr ugain disgen yn cael eu hychwanegu i gael cyfaint yr hemisffer, yna bydd y canlyniad yn cael ei dyblu i roi cyfaint y sffêr cyfan.

disc	radius r	mean r	volume			
0	3.500000000	3.497811	6.726368			
1	3.495622262	3.489039	6.692673			
2	3.482456030	3.471429	6.625282			
3	3.460400988	3.444843	6.524194			
4	3.429285640	3.409073	6.389407			
5	3.388860428	3.363824	6.220917			
6	3.338787205	3.308706	6.01872			
7	3.278623949	3.243213	5.782811			
8	3.207802986	3.166701	5.51318			
9	3.125599942	3.078344	5.209815			
10	3.031088913	2.977083	4.8727			
11	2.923076290	2.861538	4.501808			
12	2.800000000	2.729885	4.0971			
13	2.659769727	2.579635	3.658511			
14	2.499499950	2.407266	3.185929			
15	2.315032397	2.207516	2.679142			
16	2.100000000	1.97187	2.137688			
17	1.843739407	1.684677	1.560347			
18	1.525614630	1.309245	0.942388			
19	1.092874650	0.546437	0.16416			
20	0.000000000					
	hemisphere	volume	89.50314			
	sphere	volume	179.0063			

Ffigur 404: Datrysiad rhifiadol ar gyfer cyfaint sffêr

Gallwn gymharu canlyniad hwn o 179.01 cm^3 gyda'r union cywir, a gyfrifwyd gan ddefnyddio:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

sef 179.59 cm^3. Yn yr achos hwn, efallai na fydd y datrysiad rhifiadol yn ddigon cywir. Byddem yn disgwyl y gallai cywirdeb yr ateb rhifiadol yn cael ei wella trwy gynyddu nifer y disgiau yn y cyfrifiad, ond mae'r daenlen wedyn yn dod yn fawr a thrwsgl. Gall fod manteision wrth gael yr union ateb yn ddadansoddol mewn achosion lle mae fformiwla safonol eisoes ar gael, neu lle gellir fformiwla ei gael yn hawdd gan ddefnyddio technegau calcwlws. Yn yr adran nesaf, rydym yn dangos sut y mae'r fformiwla cyfaint ei deillio.

Fel yn y dull rhifiadol, rydym yn ystyried hemisffer i gael ei ffurfio o ddisgiau. Mae integreiddio yn tybio bod yna nifer anfeidrol o ddisgiau tenau yn anfeidraidd, fel bod y cyfaint yn cael ei gyfrifo yn union. Yna caiff cyfaint yr hemisffer ei ddyblu i roi sffêr gyflawn:

$$cyfaint\ y\ sff\hat{e}r = 2\int_0^R \pi r^2.dy$$

Gan fod π yn gysonyn, gellir ei symud y tu allan i'r integrol:

$$V = 2\pi\int_0^R r^2.dy$$

Gall y radiws pob disg yn cael ei gyfrifo drwy theorem Pythagoras, fel y dangosir yn flaenorol yn ffigwr 403:

$$r^2 = R^2 - y^2$$

Yn amnewid ar ran r^2 yn yr integryn:

$$V = 2\pi \int_0^R R^2 - y^2 . dy$$

Rydym bellach yn cynnal yr integriad o ran y newidyn **y**. Gan ddefnyddio dulliau calcwlws a esbonnir yng ngwerslyfrau mathemateg lefel uwch, mae'r integrol o $\mathbf{R^2}$ yw $\mathbf{R^2y}$, ac mae'r integrol o $\mathbf{y^2}$ yw $\mathbf{{}^1/_3\ y^3}$, gan roi:

$$V = 2\pi \left[R^2 y - \frac{1}{3} y^3 \right]_0^R$$

Mae canlyniad ei gyfrifo drwy amnewid terfyn uchaf **R**, ac wedyn y terfyn isaf **0**, yn lle'r newidyn **y**, a thynnu y gwerth is o'r gwerth uchaf. Mae'r terfyn isaf yn rhoi canlyniad o sero, felly:

$$V = 2\pi \left[\left(R^3 - \frac{1}{3} R^3 \right) - 0 \right]$$

$$V = 2\pi \left(R^3 - \frac{1}{3} R^3 \right)$$

$$V = 2\pi \left(\frac{2}{3} R^3 \right)$$

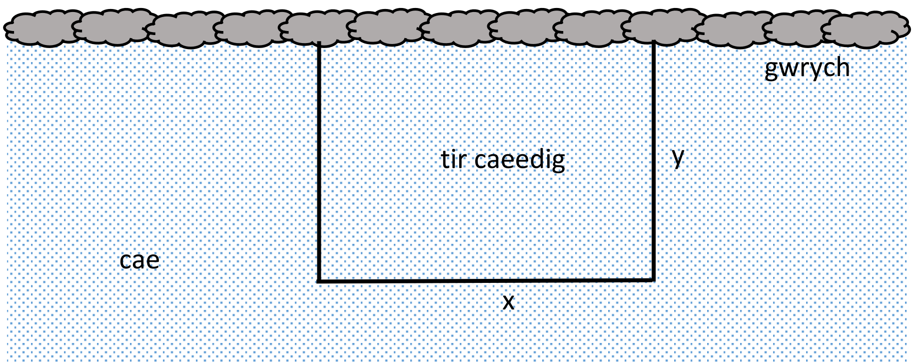
$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

Rydym wedi cwblhau tarddiad y fformiwla cyfaint am sffêr.

Modelau optimeiddio

Cymhwysiad pwysig arall o galcwlws yw dod o hyd i'r ateb gorau ar gyfer problemau lle mae ystod o ganlyniadau yn bosibl. Fel enghraifft syml, yn ystyried y cwestiwn canlynol:

> Mae ffermwr yn dymuno amgáu ardal bori o fewn cae mawr trwy gyfrwng ffens drydan dros dro. Mae ganddo 200 metr o ddeunydd ffensio. Mae gan un ochr o'r cae gwrych parhaol, felly ni fydd angen ei ffensio. Benderfynwch ar ardal betryal fwyaf y gellir ei hamgáu, a hydoedd ei hochrau.



Ffigur 405: Problem optimeiddio arwynebedd

I ddatrys y broblem, rydym yn dechrau drwy gynrychioli ochrau'r lloc ffens gan y newidynnau **x** ac **y**, fel y dangosir yn ffigwr 405 uchod. Yr amcan wedyn yw gwneud arwynebedd fwyaf ar gyfer y clostir A:

$$A = x \,.\, y$$

Mae'n rhaid i ni ystyried y gofyniad bod cyfanswm hyd y ffens yw 200 metr. Felly, mae'r hafaliad ar gyfer perimedr y clostir yn:

$$x + 2y = 200$$

Felly:

$$x = 200 - 2y$$

Amnewid gwerth am **x** yn y fformiwla arwynebedd yn rhoi:

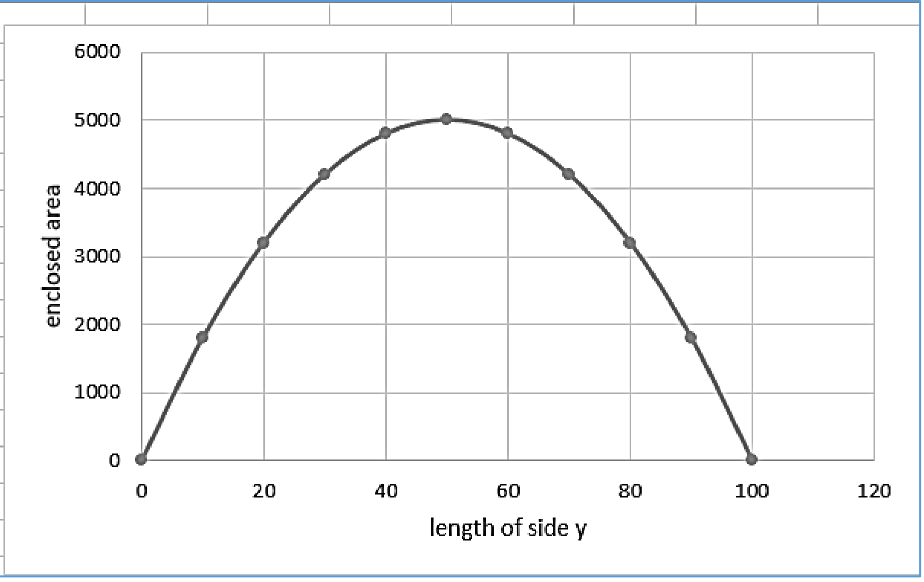
$$A = (200 - 2y)\ y$$

$$A = 200y - 2y^2$$

Gall y fformiwla hon yn cael ei ddefnyddio cyfrifo arwynebedd y lloc ar gyfer gwahanol werthoedd **y**. Hyd fwyaf posibl **y** yw 100 metr, gan adael dim deunydd ffens ar gyfer lled **x** y lloc. Canlyniadau a gynhyrchwyd gan daenlen yn cael eu dangos yn y ffigur 406 isod.

area = $200y - 2y^2$

y	area
0	0
10	1800
20	3200
30	4200
40	4800
50	5000
60	4800
70	4200
80	3200
90	1800
100	0



Ffigur 406: Arwynebedd y lloc cae ar gyfer gwahanol siapiau petryal o ffens

Mae uchafbwynt yn yr arwynebedd o 5 000 m^2 yn digwydd gyda hyd o 50m. Gall gwerth cyfatebol ar gyfer **x** yn cael ei gyfrifo fel:

$$200 - 2 \times 50 = 100m$$

Fel gyda'r rhan fwyaf o broblemau calcwlws, mae hefyd yn bosibl i ddatrys y cwestiwn hwn drwy ddull dadansoddol. O edrych ar y gromlin graff yn ffigur 406, rydym yn sylwi bod:

- Ar gyfer gwerthoedd llai na'r uchafbwynt, mae'r graddiant yn bositif, ar oleddf i fyny.
- Ar bwynt uchaf, mae'r graddiant yn sero gyda'r graff llinell yn llorweddol.
- Ar gyfer gwerthoedd y fwy na'r uchafbwynt, mae'r graddiant yn negatif, ar oleddf i lawr.

Mae hyn yn ffurfio sail y dull datrysiad dadansoddol. Rydym yn dechrau drwy ddod o hyd i'r deilliad o'r hafaliad arwynebedd, a fydd yn dweud wrthym raddiant y gromlin ar gyfer unrhyw werth **y**. Gan ddefnyddio rheolau calcwlws sydd i'w gweld mewn gwerslyfrau mathemateg lefel uwch:

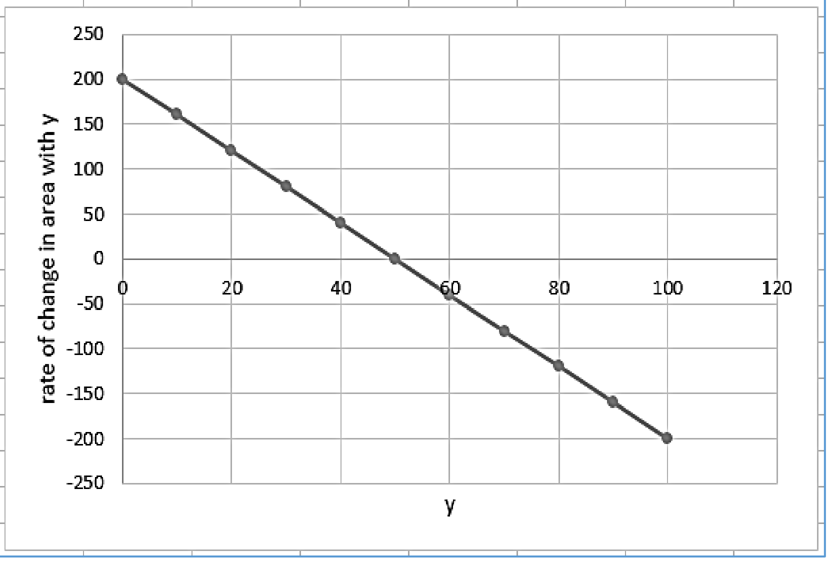
$$A = 200y - 2y^2$$

$$\frac{dA}{dy} = 200 - 4y$$

Mae graff y deilliad ei blotio gan daenlen yn ffigwr 407 isod:

$\frac{dA}{dy} = 200 - 4y$

y	derivative
0	200
10	160
20	120
30	80
40	40
50	0
60	-40
70	-80
80	-120
90	-160
100	-200



Ffigur 407: Graff o ddeilliad yr hafaliad arwynebedd

Rydym yn gweld bod y llinell graff yn mynd trwy'r sero ar werth **y** o 50. Mae hyn yn cyfateb i'r pwynt uchaf, lle mae graddiant y graff arwynebedd yn sero. Mae'r gromlin ddeilliadol yn dangos gwerthoedd graddiant positif pan fod **y** yn llai na'r uchafbwynt, a gwerthoedd graddiant negatif pan fod **y** yn fwy na'r uchafbwynt.

Mae'n aml yn fwy cywir i gyfrifo'r uchafbwynt yn uniongyrchol o'r hafaliad deilliadol gan ddefnyddio algebra, yn hytrach na drwy blotio graff. Rydym yn gosod gwerth y deilliad i sero yn y pwynt uchaf, ac yna ddatrys ar gyfer **y**:

$$200 - 4y = 0$$

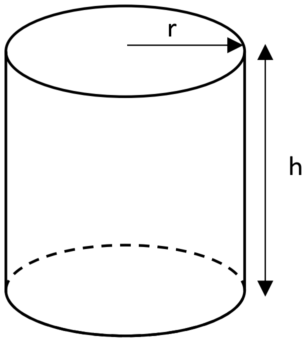
$$4y = 200$$

$$y = 50$$

sy'n cytuno â'r canlyniad y cawsom o'r blaen.

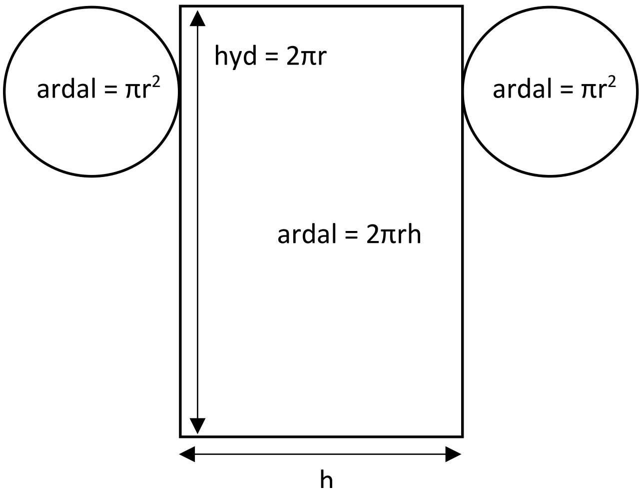
Mae'r broblem optimeiddio nesaf yn ymwneud ac arwynebedd a chyfaint:

> Mae angen i wneuthurwr wneud tun silindrog fydd yn dal 1.5 litr o hylif. Penderfynu ar ddimensiynau'r tun gyda maint lleiaf o ddeunydd a ddefnyddir wrth ei gwneud.



Ffigur 408: Cynhwysydd i gael eu gweithgynhyrchu

Bydd y tun yn cael ei wneud o dri darn o fetel: ddau ben, yn ogystal â silindr ffurfio o betryal o ddeunydd. Gallwn ysgrifennu fformiwlâu ar gyfer yr ardaloedd o'r elfennau hyn, yn seiliedig ar y radiws **r** ac uchder **h** y tun.



Ffigur 409: Arwynebeddau cydrannau'r cynhwysydd

Bydd yn gyfleus i weithio mewn unedau o gentimetrau. 1 litr yn cyfateb i 1000 cm^3. Yr amcan yw isafu'r arwynebedd y cynhwysydd:

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

Mae hyn yn amodol ar ofyniad bod cyfaint y cynhwysydd yn 1.5 litr. Gallwn gynhyrchu hafaliad ar gyfer cyfaint y silindr, gydag ardal y gwaelod crwn wedi'i luosi â'r uchder **h**:

$$V = \pi r^2 h = 1500\ cm^3$$

Aildrefnu'r hafaliad hwn yn rhoi mynegiad ar gyfer uchder o ran radiws y silindr:

$$h = \frac{1500}{\pi r^2}$$

Amnewid ar ran **h** yn yr hafaliad ardal yn rhoi:

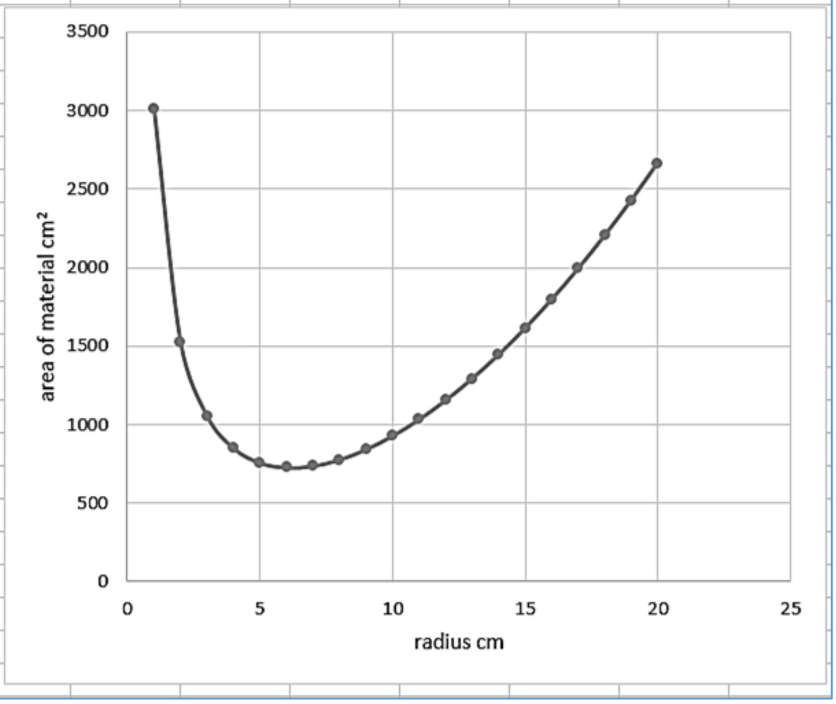
$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1500}{\pi r^2}\right)$$

$$A = 2\pi r^2 + \frac{3000}{r}$$

Gall y fformiwla hon yn cael ei ddefnyddio i gyfrifo ardal y deunydd sydd ei angen i wneud caniau o wahanol radiws **r**. Canlyniadau a gynhyrchwyd gan daenlen yn cael eu dangos yn ffigur 410 isod.

$$A = 2\pi r^2 + \frac{3000}{r}$$

r	area
1	3006.283
2	1525.133
3	1056.549
4	850.531
5	757.0796
6	726.1947
7	736.4475
8	777.1239
9	842.2713
10	928.3185
11	1032.993
12	1154.779
13	1292.628
14	1445.79
15	1613.717
16	1795.995
17	1992.311
18	2202.419
19	2426.125
20	2663.274



Ffigur 410: Graff o arwynebedd ar gyfer caniau silindrog o wahanol radiws

Mae'r arwynebedd lleiaf a ddangosir yn y tabl o ffigurau yn 726 cm^2, yn cyfateb i radiws o 6cm. Fodd bynnag, ni allwn fod yn sicr nad yw'r gwir lleiaf rhyw werth arall yn agos i hon. Mae'n anodd adnabod y gwir lleiaf oddi wrth y graff, gan fod y gromlin yn agos at lorweddol dros yr ystod o werthoedd **r** rhwng 5cm a 7cm.

I gael ateb mwy cywir i'r broblem, gall ddull dadansoddol yn cael ei ddefnyddio. O edrych ar gromlin y graff yn ffigur 410, rydym yn sylwi bod:

- Ar gyfer gwerthoedd **r** llai na'r isafbwynt, mae'r graddiant yn negyddol, ar lethr i lawr.
- Ar bwynt isaf, mae'r graddiant yn sero gyda llinell lorweddol.
- Ar gyfer gwerthoedd **r** yn fwy na'r isafbwynt, mae'r graddiant yn bositif, ar oleddf i fyny.

Fel yn achos y broblem lloc cae cynharach, gallwn gyfrifo deilliad o'r fformiwla ardal ac yn defnyddio hyn i ddod o hyd i'r pwynt lle mae'r graddiant y graff ardal yn sero. Bydd hyn yn rhoi lleoliad isafbwynt ar y gromlin.

Gan ddefnyddio rheolau calcwlws i ddarganfyddwch fynegiad ar gyfer y deilliad:

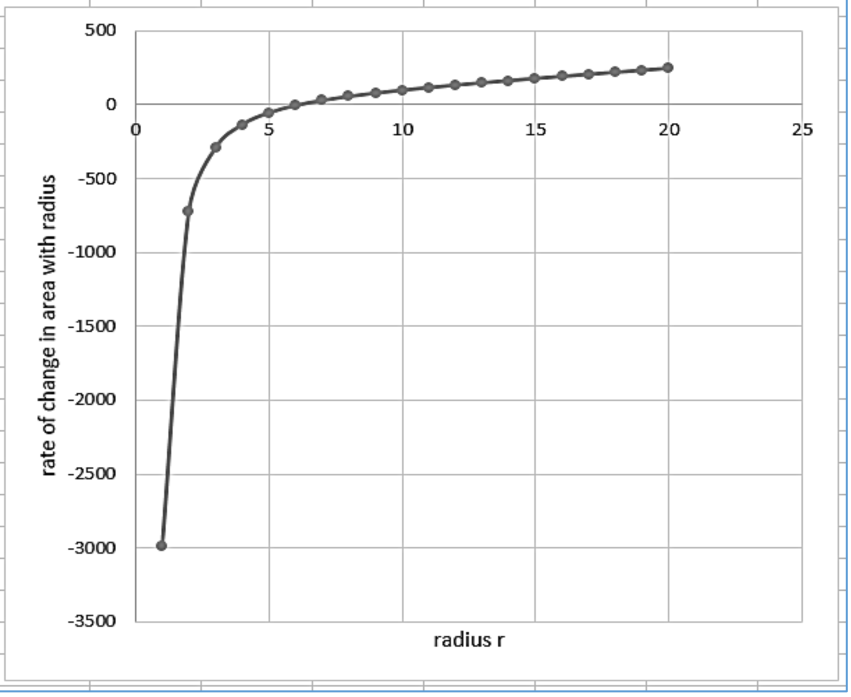
$$A = 2\pi r^2 + \frac{3000}{r}$$

$$\frac{dA}{dr} = 4\pi r - \frac{3000}{r^2}$$

Mae'r graff y deilliad ei blotio gan daenlen yn ffigwr 411 isod:

$$\frac{dA}{dr} = 4\pi r - \frac{3000}{r^2}$$

r	derivative
1	-2987.43
2	-724.867
3	-295.634
4	-137.235
5	-57.1681
6	-7.93511
7	26.7401
8	53.65596
9	76.0603
10	95.66371
11	113.4367
12	129.9631
13	145.6113
14	160.6231
15	175.1622
16	189.3432
17	203.2477
18	216.9354
19	230.4508
20	243.8274



Ffigur 411: Graff o ddeilliad yr hafaliad arwynebedd

Gwelwn o'r tabl o ffigurau bod y deilliad yn newid o negatif i bositif rhwng r = 6 a r = 7, felly mae'r union leoliad yr isafbwynt yn gorwedd yn y cyfwng hwn.

Ar yr isafbwynt mae'r graddiant yn werth sero, felly

$$4\pi r - \frac{3000}{r^2} = 0$$

Aildrefnu:

$$\frac{4\pi r^3 - 3000}{r^2} = 0$$

I gael gwared â'r ymraniad, gallwn luosi'r ddwy ochr yr hafaliad gan r^2 :

$$4\pi r^3 - 3000 = 0$$

$$r^3 = \frac{3000}{4\pi}$$

Yn cymryd gwreiddyn ciwb i ddod o hyd i'r canlyniad ar gyfer y radiws:

$$r = \sqrt[3]{\frac{3000}{4\pi}}$$

$$r = 6.20\ cm$$

Gallwn nawr yn dod o hyd i'r uchder y tun hwn:

$$h = \frac{1500}{\pi r^2}$$

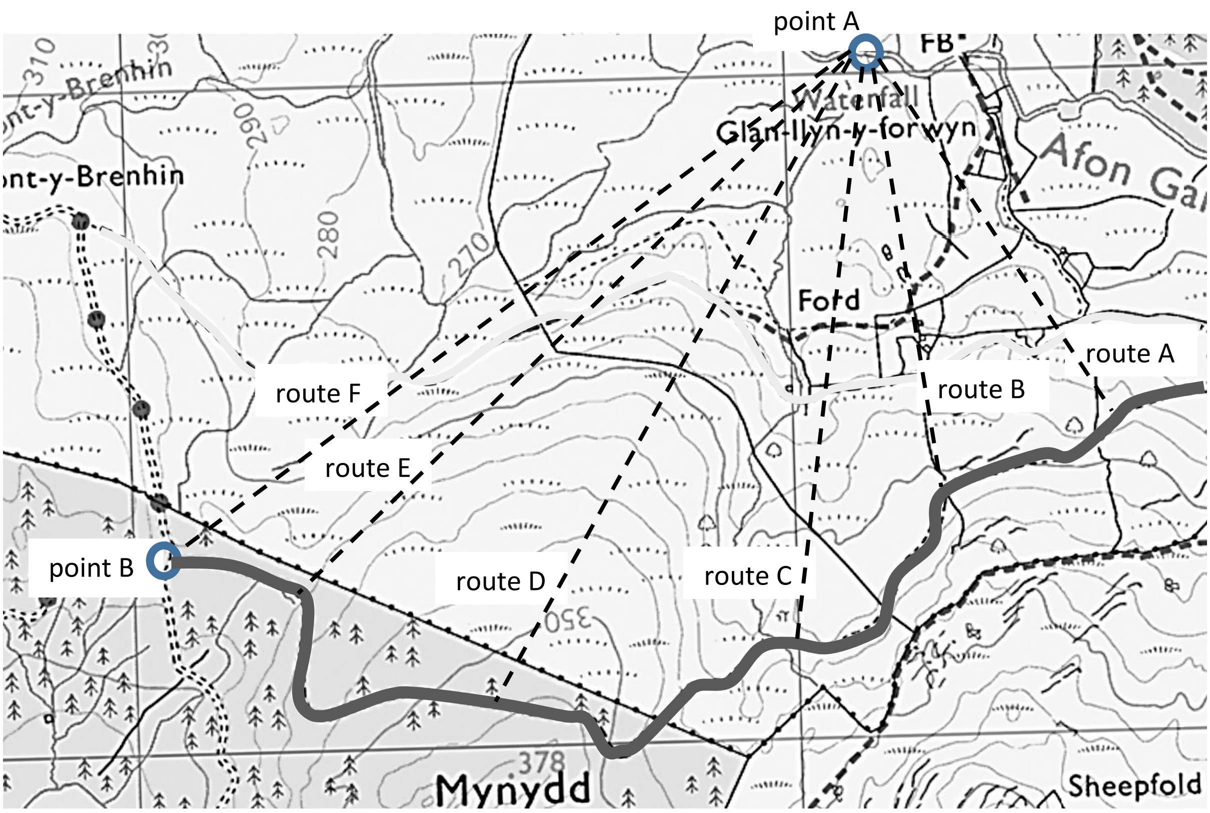
$$h = \frac{1500}{\pi (6.20)^2}$$

$$h = 12.42\ cm$$

Felly gall y tun silindrog 1.5 litr sy'n defnyddio'r lleiafswm o ddeunydd yn cael radiws o 6.2cm ac uchder o 12.4cm.

Weithiau, mae'n bosibl gyda phroblemau optimeiddiaeth nad oes unrhyw fformiwla algebraidd ar gael i ddadansoddi, a gall yr ateb dim ond ar gael drwy ddulliau rhifiadol. Fel enghraifft byddwn yn ystyried y sefyllfa a ddangosir yn ffigur 412 isod:

> Mae grŵp yn cynnal alldaith. Fel rhan o'r llwybr, mae angen i deithio ar droed o'r rhaeadr ar bwynt A i'r gyffordd yn y pwynt B. Rhaid i'r grŵp groesi'r rhostir garw i gyrraedd ffordd goedwig, yna dilyn hwn i'r gyrchfan. Mae chwe llwybr posibl A - F yn cael eu marcio ar y map. Pa un fyddai'r gyflymaf?

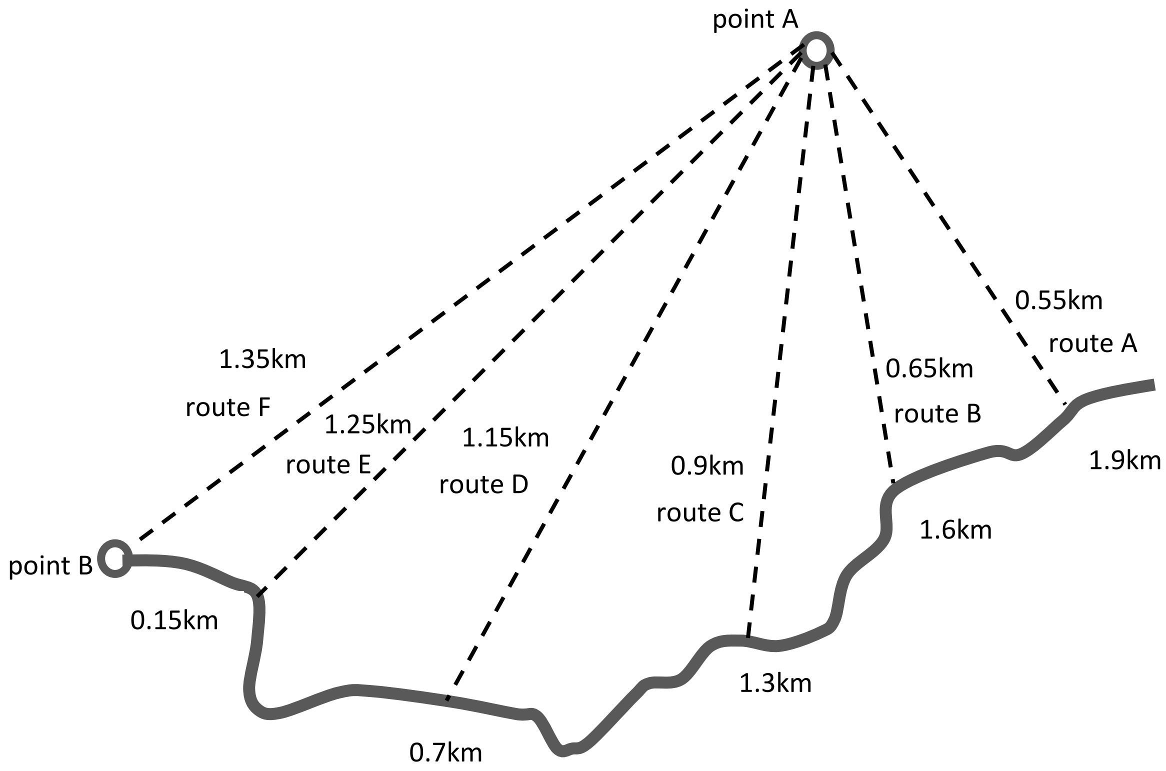


Ffigur 412: Map o lwybrau posibl rhwng pwyntiau A a B

Bydd y grŵp yn gallu teithio yn gyflymach ar hyd y ffordd goedwigaeth nag ar draws y rhostir garw. O brofiad blaenorol ar dir tebyg, adnabyddir bydd cyflymder ar hyd y ffordd tua 4 km/h, tra bydd cyflymder ar draws y rhostir dim ond 1.5 km/awr.

Mesuriadau ar gyfer y llwybrau posibl A i F yn cael eu dangos yn ffigur 413.

- Un strategaeth bosibl ar gyfer y grŵp yw cyrraedd y ffordd goedwigaeth ar hyd y llwybr byrraf A. Bydd hyn yn lleihau'r pellter ar draws y rhostir garw ar gyflymder araf, ond bydd yn golygu taith gerdded hirach ar hyd y ffordd.
- Mae strategaeth arall yw mynd ymlaen yn uniongyrchol i'r gyrchfan drwy ddilyn llwybr F ar draws y rhostir. Mae hyn yn lleihau cyfanswm y pellter i'w cwmpasu, ond mae'n golygu taith araf ar draws tir anodd.
- Mae llwybrau B-E yn cynrychioli gwahanol raddau o gyfaddawd rhwng y ddwy strategaeth flaenorol.

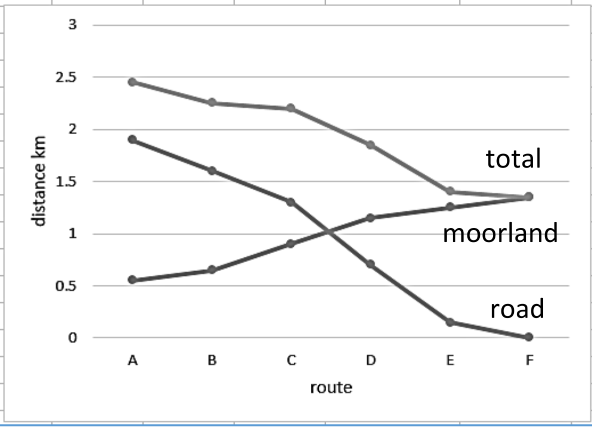


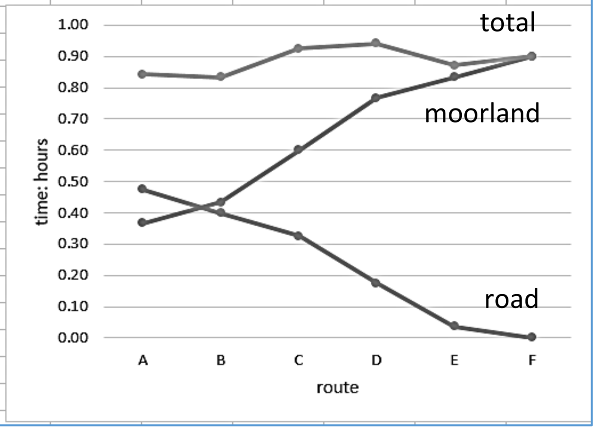
Ffigur 413: Pellteroedd ar gyfer llwybrau posibl o bwynt A i bwynt B

Er mwyn ymchwilio'r broblem hon, mae pellteroedd ac amseroedd teithio wedi cael eu cyfrifo drwy daenlen, a chanlyniadau yn cael eu harddangos fel graffiau yn ffigwr 414 isod. Rydym yn darganfod bod **llwybr B** y cyflymaf, gan groesi yn weddol uniongyrchol i'r ffordd. Fodd bynnag, byddai hefyd yn gyflym i gymryd **llwybr E** sy'n cadw pennaf i'r rhostir er mwyn lleihau'r pellter a deithiwyd yn gyflawn.

moorland	1.5	km/h	
road	4	km/h	

route	moorland	road	total	moorland time	road time	total time
A	0.55	1.9	2.45	0.37	0.48	0.84
B	0.65	1.6	2.25	0.43	0.40	0.83
C	0.9	1.3	2.2	0.60	0.33	0.93
D	1.15	0.7	1.85	0.77	0.18	0.94
E	1.25	0.15	1.4	0.83	0.04	0.87
F	1.35	0	1.35	0.90	0.00	0.90





Ffigur 414: Pellteroedd ac amseroedd ar gyfer y llwybrau amgen

Crynodeb

Mae gan Calculus dau brif ddefnydd:

- **Differiad** i benderfynu ar y gyfradd y mae meintiau yn newid. Enghreifftiau yw: defnyddio mesuriadau cyflymder ar adegau gwahanol i benderfynu cyflymu, neu ddefnyddio'r maint y deunydd ymbelydrol i benderfynu faint o atomau bydd yn pydru yn ystod y cyfnod nesaf. Gall cyfraddau newid hefyd fod yn ddefnyddiol wrth ddod o hyd i werthoedd uchafswm a lleiafswm, gan fod y gyfradd newid yn dod yn sero yn y mannau hyn.
- **Integreiddio** i bennu cyfansymiau o gyfres o werthoedd a gafwyd ar gyfyngau. Enghreifftiau yw: pennu cyfanswm y pellter a deithiwyd gan ddefnyddio mesuriadau o gyflymder mewn cyfres o amserau, neu benderfynu ar y cyfaint o siâp solid gan ddefnyddio ei arwynebedd trawstoriadol ar gyfres o bwyntiau.

Gall problemau calcwlws cael eu datrys yn aml drwy ddefnyddio dulliau rhifiadol, gyda chanlyniadau harddangos fel tablau o werthoedd neu raffiau. Y dewis arall yw defnyddio dadansoddiad algebraidd. Mae'r ddau ddull hyn yn cael manteision a chyfyngiadau:

- Gall datrysiadau rhifiadol fod yn haws i'w deall ac yn gallu eu gwirio yn haws yn erbyn y sefyllfa byd go iawn. Mewn rhai sefyllfaoedd, ni all unrhyw fformiwlâu syml ar gael i ddisgrifio'r system, felly mae ateb rhifiadol yr unig bosibilrwydd. Fodd bynnag, gall datrysiadau rhifiadol fod ddim ond yn fras.
- Mae datrysiadau dadansoddol yn rhoi atebion manwl cywir, felly eu gallu fod yn angenrheidiol pan chywirdeb uchel yn hanfodol. Mae'n aml gyflymaf i ddefnyddio atebion dadansoddol os yw fformiwla ar gael. Fodd bynnag, gall dod o hyd i fformiwla addas fod yn anodd neu'n amhosibl weithiau.